文章编号：1674-0629(2026)09-0001-12 中图分类号：TM712 文献标志码：A
DOI：10.13648/j.cnki.issn1674-0629.2026.09.001

# 基于广义多项式混沌展开的电力系统概率频率稳定性评估

卜思齐[1]，王照远[2]
（1. 香港理工大学电机及电子工程学系，香港 999077；2. 国网辽宁省电力有限公司电力科学研究院，沈阳 110055）

**摘要：**可再生能源的随机性与波动性给新型电力系统的频率稳定性带来极大挑战。因此，频率稳定性评估对系统的安全运行具有重要意义。当前由于缺乏准确高效的概率频率稳定性评估方法，且传统多项式混沌展开方法存在诸多缺陷，因此提出了一种基于广义多项式混沌展开概率频率稳定性评估方法。该方法基于广义多项式混沌展开，因而适用于服从任意分布的随机变量，同时采用拉丁超立方采样提高样本点的采样效率。此外，通过Cholesky分解使得所提方法能够处理存在相关性的随机变量。同时，引入双曲线截断缓解了传统多项式混沌展开方法存在的维数灾问题。采用IEEE 39节点系统以及IEEE 68节点系统进行算例分析，并与其他方法结果进行对比，验证了所提方法的高效性与准确性。

**关键词：**电力系统；频率稳定性；不确定性量化；广义多项式混沌展开

# Probabilistic Frequency Stability Assessment of Power Systems Based on Generalized Polynomial Chaos Expansion

BU Siqi[1], WANG Zhaoyuan[2]
（1. Department of Electrical and Electronic Engineering, the Hong Kong Polytechnic University, Hong Kong 999077, China;
2. Electric Power Research Institute of State Grid Liaoning Electric Power Co., Ltd., Shenyang 110055, China）

**Abstract:** The intermittence and fluctuation of renewable energy generation pose a huge threat to the frequency stability of modern power system. Thus, the assessment of frequency stability is of great significance to the safety operation of power system. Due to the lack of accurate and efficient probabilistic frequency stability assessment methods and the disadvantages of traditional polynomial chaos expansion methods, this paper proposes a probabilistic frequency stability assessment method based on generalized polynomial chaos expansion. Based on generalized polynomial chaos expansion, the proposed method is suitable for random variables following arbitrary distributions. Moreover, Latin hypercube sampling is applied to improve the sampling efficiency. In addition, the utilization of Cholesky decomposition enables the proposed method to handle correlated random variables. Furthermore, hyperbolic truncation is adopted to alleviate the curse of dimensionality in the traditional polynomial chaos expansion methods. The etficiency and accuracy of the proposed method are verified in the IEEE-39 bus and IEEE-68 bus systems compared with other methods.

**Key words:** power system; frequency stability; uncertainty quantification; generalized polynomial chaos expansion

## 0 引言

为应对能源短缺以及环境污染等问题，各国积极出台相应政策大力发展可再生能源的利用技术减少碳排放[1-2]。因此，电力系统将逐步转变为含高比例可再生能源的新型电力系统。然而，在常规控制下，以风电、光伏为代表的可再生能源发电不具备传统同步机的惯性响应特性[3]。因而，可再生能源的大规模接入将使电力系统转动惯量下降[4]，对系统的频率稳定产生负面影响[5]。此外，可再生能源的间歇性与波动性将增加系统功率不平衡的风

**基金项目：**国家自然科学基金资助项目(52077188)；香港研资局项目(15208323)；国家电网有限公司科技项目(5222LK26003K)。
**Foundation item:** Supported by the National Natural Science Foundation of China (52077188); HK RGC Project (15208323); the Science and Technology Project of State Grid Corporation of China (5222LK26003K).

险，进而影响系统的频率稳定以及供电可靠性。因此，有效的频率稳定性评估方法对保证新型电力系统的安全运行具有重要意义。

目前概率频率稳定性评估方法主要包括数值法、解析法以及代理模型法[6]。数值法以蒙特卡洛仿真(Monte Carlo simulation，MCS)为代表，其评估结果精度高、适用性强，通常被作为验证其他方法的基准[7-10]。但MCS依赖大量重复仿真，计算负担较重。针对该问题，现有研究主要从两个方向开展改进：一是通过频率风险区域划分及可视化等方法减少必要仿真次数[11]；二是在系统频率响应(system frequency response，SFR)模型框架下采用多点和多段灵敏度的方法评估频率稳定性[12-13]。前者在复杂场景下仍可能面临仿真规模过大的问题，后者的精度则受限于SFR模型本身的适用范围与建模精度[14-15]。解析法则通过数学推导直接获取概率分布，如半不变量法[16]，其计算效率显著优于数值法，但通常基于不确定性输入与系统输出间存在线性关系的假设，当该假设不成立时，评估精度难以保证。因此，目前缺乏准确高效的概率频率稳定性评估方法。

近年来，以多项式混沌展开(polynomial chaos expansion，PCE)为代表的代理模型法在电力系统不确定性量化领域展现出良好前景，相比于数值法大幅提高了计算效率，同时相比于解析法具有更高的计算准确度，目前已被应用于概率潮流计算[17-22]、小干扰稳定[23-24]、暂态稳定[25-26]以及电压稳定[27]等问题的概率分析中，但目前少有针对频率稳定性的研究[28]。另外，传统PCE方法只能处理独立的特定分布的随机变量，且存在维数灾难的问题，因而需要提出一种能够避免上述缺陷的PCE方法分析概率频率稳定。

为研究可再生能源以及负荷的不确定性对新型电力系统频率稳定的影响，本文提出了一种基于广义多项式混沌展开(generalized polynomial chaos expansion，gPCE)的概率频率稳定性评估方法。相比于传统的PCE，该方法适用于服从任意分布的独立的以及相关随机变量，同时缓解了维数灾难的问题。将该方法应用于IEEE 39节点以及IEEE 68节点系统的概率频率稳定分析并与MCS以及PCE方法进行对比，验证了所提方法的有效性。

## 1 电力系统的不确定性建模及频率稳定性

### 1.1 电力系统不确定性建模

电力系统中的不确定性通常采用随机变量表示。不确定性建模旨在描述随机变量的特性，并建立随机变量与设备输出或消耗功率的关系。本文主要考虑供电侧风电、光伏以及用电侧负荷的不确定性对系统频率稳定的影响，因而需要对其进行建模。

#### 1.1.1 风电不确定性

风速的概率分布通常近似服从Weibull分布[16]，因而，第$i$个风电场所在位置的风速$v_i$的概率密度函数(probability density function，PDF)$g(v_i)$可以表示为：

$$g(v_i)=\frac{\kappa_i}{\chi_i}\left(\frac{v_i}{\chi_i}\right)^{\kappa_i-1}\exp\left(-\left(\frac{v_i}{\chi_i}\right)^{\kappa_i}\right) \tag{1}$$

式中$\kappa_i$、$\chi_i$分别为风速$v_i$服从的Weibull分布的形状参数与尺度参数。

第$i$个风电场的有功功率输出参考值$P_{wi}$与风速$v_i$的关系可以表示为[29]：

$$P_{wi}=\begin{cases}P_{wri}, v_{ri}<v_i\leqslant v_{outi}\\ \dfrac{P_{wri}v_{ini}}{v_{ini}-v_{ri}}+\dfrac{P_{wri}v_i}{v_{ri}-v_{ini}}, v_{ini}\leqslant v_i\leqslant v_{ri}\\ 0, \text{其他}\end{cases} \tag{2}$$

式中：$v_{ini}$、$v_{ri}$、$v_{outi}$分别为第$i$个风电场的切入风速、额定风速与切出风速；$P_{wri}$为第$i$个风电场的额定有功功率。

#### 1.1.2 光伏不确定性

光照强度的概率分布通常近似服从Beta分布[21]，因此第$j$个光伏电站所在位置的光照强度$r_j$的PDF$g(r_j)$通常表示为：

$$g(r_j)=\frac{\Gamma(\alpha_j+\beta_j)}{\Gamma(\alpha_j)\Gamma(\beta_j)}\left(\frac{r_j}{r_{maxj}}\right)^{\alpha_j-1}\left(1-\frac{r_j}{r_{maxj}}\right)^{\beta_j-1} \tag{3}$$

式中：$r_{maxj}$为第$j$个光伏电站的最大光照强度；$\Gamma(\cdot)$为Gamma函数；$\alpha_j$、$\beta_j$为光照强度$r_j$服从Beta分布的形状参数。

第$j$个光伏电站的有功功率输出参考值$P_{sj}$与光照强度$r_j$的关系可以表示为[17]：

$$P_{sj}=\eta_j S_j r_j \tag{4}$$

式中$\eta_j$、$S_j$分别为第$j$个光伏电站光电转化率、光伏阵列面积。

需要说明的是，风电与光伏的不确定性建模是以风速和光照强度等气象不确定性数据作为输入，根据最大功率跟踪计算设备的功率控制参考值，而非风电与光伏的实际功率输出。风电与光伏的实际功率输出及动态特征需要以功率控制参考值作为输入，根据所采用的控制策略计算分析。同时，本文所提出的方法为非侵入式方法，即仅需要作为不确定性的输入数据(功率控制参考值)与所关心的频率响应数据。系统、风电及光伏所采用的控制策略仅影响频率响应最终结果而并不会对方法的计算过程产生影响，因此为节约篇幅，本文未对风电及光伏所采用的常规控制策略做详细描述，可参考文献[30]。

1.1.3　负荷不确定性

通常假设负荷有功功率的概率分布服从正态分布[19]，因而，第 $k$ 个负荷 $P_{lk}$ 的 PDF $g(P_{lk})$ 可以表示为：

$$g(P_{lk})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{lk}}\exp\left(-\frac{(P_{lk}-\mu_{lk})^2}{2\sigma_{lk}^2}\right) \tag{5}$$

式中 $\mu_{lk}$、$\sigma_{lk}$ 分别为第 $k$ 个负荷 $P_{lk}$ 服从的正态分布的均值与标准差。

1.1.4　相关随机变量处理

电力系统中的不确定性并非全部是独立随机变量，例如，在风机位置相近时，所在位置的风速存在一定的相关性[29]。本文采用相关系数矩阵以及 Copula 函数来表示随机变量间的相关性。对于存在相关性 $\boldsymbol{\rho}$ 的随机变量 $\boldsymbol{\xi}_c$，其 PDF $g_{\mathrm{Cop}}(\boldsymbol{\xi}_c)$ 可以表示为：

$$g_{\mathrm{Cop}}(\boldsymbol{\xi}_c)=\frac{\partial\phi_{\boldsymbol{\rho}}(\phi^{-1}(\xi_{c1}),\phi^{-1}(\xi_{c2}),\cdots,\phi^{-1}(\xi_{cN_c}))}{G(\xi_{c1}),G(\xi_{c2}),\cdots,G(\xi_{cN_c})}\prod_{l=1}^{N_c}g(\xi_{cl}) \tag{6}$$

式中：$\phi$ 为 Copula 生成函数，本文选为高斯函数，因而 $\phi_{\boldsymbol{\rho}}(\cdot)$ 均值为 0，协方差矩阵为 $\boldsymbol{\rho}$ 的多元高斯分布的联合累计高斯分布函数；$g(\xi_{cl})$、$G(\xi_{cl})$ 分别为随机变量 $\xi_{cl}$ 的 PDF 与累积概率密度函数(cumulative density function，CDF)；$\boldsymbol{\xi}_c$ 为随机变量矩阵，即 $\boldsymbol{\xi}_c=\left[\xi_{c1},\ \xi_{c2},\ \cdots,\ \xi_{cN_c}\right]$；$\xi_{cl}$ 为第 $l$ 个随机变量；$N_c$ 为 $\boldsymbol{\xi}_c$ 含有的随机变量数量。

由于 PCE 方法需要输入的随机变量是独立的，因而需要将存在相关性的随机变量 $\boldsymbol{\xi}_c$ 转化为独立的随机变量 $\boldsymbol{\xi}$。在实际中，相关系数矩阵 $\boldsymbol{\rho}$ 通常为对称正定矩阵，因此，可以采用 Cholesky 分解进行变换[31]：

$$\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{\xi}_c \tag{7}$$

式中 $\boldsymbol{C}$ 为 Cholesky 分解矩阵，$\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\rho}$。

### 1.2　电力系统频率稳定性

在系统遭受扰动后，各台发电机的频率响应各不相同，系统的频率响应 $f_{\mathrm{sys}}$ 可视为由各台发电机频率根据转动惯量聚合而成[16]。

$$f_{\mathrm{sys}}=f_qH_q/\sum_{q=1}^{N_G}H_q \tag{8}$$

式中：$f_q$、$H_q$ 分别为第 $q$ 台发电机的频率及基准容量下的转动惯量；$N_G$ 为系统中的发电机数量。

同样地，区域 $a$ 的频率响应 $f^{(a)}$ 可以由区域内发电机的频率响应聚合而成：

$$f^{(a)}=f_q^{(a)}H_q^{(a)}/\sum_{q=1}^{N_G^{(a)}}H_q^{(a)} \tag{9}$$

式中：$f_q^{(a)}$、$H_q^{(a)}$ 分别为区域 $a$ 中第 $q$ 台发电机的频率及基准容量下的转动惯量；$N_G^{(a)}$ 为区域 $a$ 中的发电机数量。

需要说明的是，式(8)与式(9)为新能源设备未提供惯量的系统及区域频率计算公式，若新能源设备采用虚拟同步机等控制策略，则需要考虑新能源设备提供的惯量。

电力系统频率稳性评估主要关注系统受到扰动后系统频率能够保持或恢复到允许范围内[32-33]。而频率最小值/最大值(frequency nadir/frequency vertex，FN/FV) $F_{\mathrm{FN/FV}}$ 与最大频率变化率(rate of change of frequency，RoCoF) $F_{|\mathrm{RoCoF}|}$ 的绝对值是评估频率稳定性的常见指标[28,34]以及自动低频减负荷的动作判定依据[35]。因此，本文主要通过分析 FN/FV 与|RoCoF|以及频率响应的 PDF 来评估频率稳定性。FN/FV 与|RoCoF|可以表示为：

$$\begin{cases}F_{\mathrm{FN/FV}}=\min/\max(f)\\F_{|\mathrm{RoCoF}|}=\max(|\mathrm{d}f/\mathrm{d}t|)\end{cases} \tag{10}$$

## 2　基于广义多项式混沌展开的概率频率稳定评估

PCE 方法是利用一组与输入的随机变量概率分布相关的正交多项式的加权组合来近似表示随机变量与系统输出之间关系的一种不确定性量化方法。

系统输出 $y$（本文主要考虑 FN/FV、|RoCoF|以及频率响应）与独立随机变量 $\boldsymbol{\xi}$ 之间的关系 $M(\boldsymbol{\xi})$ 可以利用 PCE 方法近似表示为：

$$y = M(\boldsymbol{\xi}) \approx \hat{y} = \hat{M}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{n=0}^{N_P-1} \omega_n \varphi_n(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi}) \tag{11}$$

式中：$N_P$ 为 PCE 的截断项数量；上标“^”表示变量的近似值；$\omega_n$、$\varphi_n(\boldsymbol{\xi})$ 分别为 $\boldsymbol{\omega}$、$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi})$ 的第 $n$ 个元素；$\boldsymbol{\omega}$ 为系数矩阵；$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi})$ 为多项式矩阵；$\omega_n$ 为待定系数；$\varphi_n(\boldsymbol{\xi})$ 为正交多项式基函数 $\psi_n(\xi)$ 的张量乘积：

$$\varphi_n(\boldsymbol{\xi}) = \psi_n(\xi_1) \otimes \psi_n(\xi_2) \otimes \cdots \otimes \psi_n(\xi_{N_U}) \tag{12}$$

式中：$\boldsymbol{\xi} = [\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{N_U}]$；$N_U$ 为随机变量数量。

因此，建立 PCE 的主要工作在于构建基函数以及计算待定系数。

### 2.1 基函数构建

传统的 PCE 方法只适用于随机变量服从特定概率分布的情况，适用的概率分布范围归纳在 Askey 方案中[36]。然而，某些常用分布，例如经常用于描述风速随机性的 Weibull 分布，并不在 Askey 方案中。为了能够使不确定性量化方法具有更广的适用范围，本文采用 gPCE 进行概率频率稳定评估。广义主要体现在 gPCE 适用于服从任意分布的随机变量。gPCE 的基函数构建可以采用 Stieltjes 步骤实现[25]。

对于第 $u$ 个随机变量 $\xi_u$，其 $m$ 阶正交多项式基函数 $\psi_{n,m}(\xi_u)$ 可以根据以下递推关系得到。

$$\begin{aligned}&\psi_{n,m+1}(\xi_u) = (\xi_u - \lambda_m)\psi_{n,m}(\xi_u) - \gamma_m \psi_{n,m-1}(\xi_u),\\ &\psi_{n,-1} = 0, \psi_{n,0} = 1, m = 0, 1, 2, \cdots, N_O\end{aligned} \tag{13}$$

式中：$N_O$ 为正交多项式基函数最高阶数；$\lambda_m$、$\gamma_m$ 为 $m$ 阶正交多项式基函数的系数，可以根据式(14)计算得到。

$$\begin{cases}\lambda_m = \dfrac{\int \xi_u \psi_{n,m}^2(\xi_u) g(\xi_u) \mathrm{d}\xi_u}{\int \psi_{n,m}^2(\xi_u) g(\xi_u) \mathrm{d}\xi_u}, \ m = 0, 1, 2, \cdots, N_O \\ \gamma_m = \dfrac{\int \psi_{n,m}^2(\xi_u) g(\xi_u) \mathrm{d}\xi_u}{\int \psi_{n,m-1}^2(\xi_u) g(\xi_u) \mathrm{d}\xi_u}, m = 1, 2, \cdots, N_O, \gamma_0 = 1\end{cases} \tag{14}$$

此外，规定 gPCE 最高阶数与正交多项式基函数最高阶数 $N_O$ 相同，因此需要保证 $\varphi_n(\boldsymbol{\xi})$ 的最高阶数小于等于 $N_O$。进而可以得到待定系数的数量即 gPCE 的截断项数 $N_P$ 与随机变量数目 $N_U$ 以及 gPCE 阶数 $N_O$ 间的关系为：

$$N_P = (N_U + N_O)! \ / (N_U! \ N_O!) \tag{15}$$

因此，在 $N_O$ 固定的情况下，$N_P$ 将会随着 $N_U$ 的增加以阶乘关系增长，导致产生维数灾难。由于实际系统的输出一般主要受到输入变量及其低阶交叉项的影响，而受高阶交叉项的影响较小[37]，因此，采用双曲线截断舍弃部分 gPCE 中的高阶交叉项，降低待定系数数量。经双曲截断后，正交多项式基函数的交叉阶数组合满足的约束条件由式(16)的第一式变为第二式。

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{u=1}^{N_U} o_u \leqslant N_O \\ \left(\displaystyle\sum_{u=1}^{N_U} o_u^s\right)^{\frac{1}{s}} \leqslant N_O\end{cases} \tag{16}$$

式中：$o_u$ 为随机变量 $\xi_u$ 的正交多项式基函数阶数；$s$ 为稀疏因子。

通常，采样样本数量 $N_S$ 需满足 $N_S \geqslant 2N_P$ 才能保证 PCE 方法达到较好的精度[17]，因此稀疏因子的选取原则为满足以上采样样本数量条件的最大值。

### 2.2 待定系数计算

为计算待定系数矩阵 $\boldsymbol{\omega}$，首先需要对 $\boldsymbol{\xi}$ 进行采样，并进行仿真计算，得到一组随机变量样本 $\boldsymbol{\xi}_{(1\sim N_S)}$ 以及对应的输出响应 $\boldsymbol{y}_{(1\sim N_S)}$。常规的随机采样效率较低，为了提高采样效率进而提升 gPCE 的准确度，本文采用空间覆盖率更高的拉丁超立方采样（Latin hypercube sampling，LHS）[38]。

LHS 是一种分层抽样方法，通过采样和排列两个步骤使随机变量的采样值尽可能地覆盖随机空间。在采样阶段，对于任一随机变量 $\xi_u$，将其 CDF $G(\xi_u)$ 根据 $G(\xi_u)$ 的取值范围分割为 $N_S$ 段，取每一段 $G(\xi_u)$ 中点对应的 $\xi_u$ 取值作为采样点。在排列阶段，改变各随机变量采样值的顺序，使得采样值之间的相关性最小。

在得到采样样本后，利用最小二乘拟合估计[17]得到 $\boldsymbol{\omega}$ 的估计值：

$$\boldsymbol{\omega} \approx \hat{\boldsymbol{\omega}} [\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi}_{(1\sim N_S)})^T \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi}_{(1\sim N_S)})]^{-1} \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi}_{(1\sim N_S)})^T \boldsymbol{y}_{(1\sim N_S)} \tag{17}$$

### 2.3　频率稳定评估

在求得 gPCE 的基函数以及待定系数后，可获得系统输出 $y$ 的均值 $\mu_y$ 与方差 $\sigma_y^2$：

$$\mu_y = \omega_0, \sigma_y^2 = \sum_{n=1}^{N_P-1} \omega_n^2 E[\varphi_n(\boldsymbol{\xi})]^2 \tag{18}$$

式中 $E[\cdot]$ 为均值函数。

同时，采样一组随机变量样本 $\boldsymbol{\xi}_{(1\sim N_{KDE})}$，利用得到的 gPCE 计算对应的系统输出估计值 $\hat{\boldsymbol{y}}_{(1\sim N_{KDE})}$，通过核密度估计(kernel density estimation，KDE)计算得到 $y$ 的近似 PDF $g_{KDE}(\hat{y})$，进一步对频率稳定进行评估：

$$g(y) \approx g_{KDE}(\hat{y}) = \frac{1}{h_{KDE} N_{KDE}} \sum_{d=1}^{N_{KDE}} K\left(\frac{\hat{y} - \hat{y}_{(d)}}{h_{KDE}}\right) \tag{19}$$

式中：$N_{KDE}$ 为 KDE 的采样数量；$K(\cdot)$ 为 KDE 的核函数，本文选为高斯函数；$h_{KDE}$ 为 KDE 带宽，通常选为 $1.06\sigma_{\hat{y}} N_{KDE}^{-0.2}$[26]，$\sigma_{\hat{y}}$ 为 $\hat{\boldsymbol{y}}_{(1\sim N_{KDE})}$ 的标准差；$\hat{y}_{(d)}$ 为第 $d$ 个 gPCE 计算得到的系统输出估计值。

## 3　算法流程

根据第 1 节与第 2 节的内容，基于 gPCE 的电力系统概率频率稳定性评估的主要步骤可以概括为：首先确定系统中的不确定性服从的概率分布，并采用 Cholesky 分解转换为独立随机变量。然后进行 LHS 采样，计算 gPCE 的基函数以及待定系数。最后根据 gPCE 得到系统频率输出响应的统计量以及 PDF，评估概率频率稳定性。详细流程如图 1 所示。

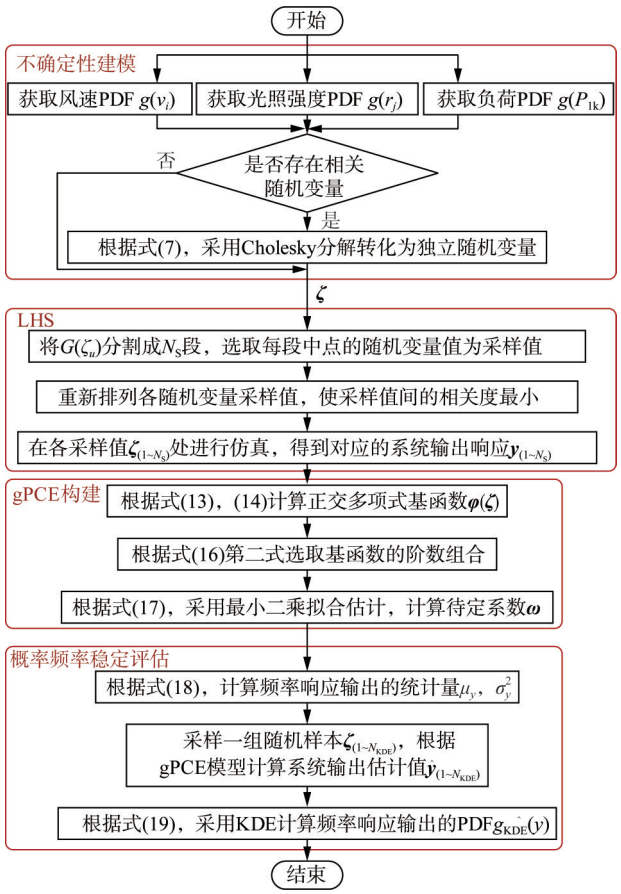



**图 1　基于 gPCE 的概率频率稳定性评估流程**

Fig. 1　Flow chart of probabilistic frequency stability assessment of power system based on gPCE

## 4　算例分析

### 4.1　算例 1：不确定性相互独立

本文算例测试的硬件平台为配置为 Intel Core i7−11390H CPU @ 3.20 GHz、16 GB 内存的个人电脑，软件平台为 MATLAB 2024b。算例 1 采用 IEEE 39 节点系统，系统参数基于文献[16]。虽然电力系统的扰动量大小不可控，但是最大出力机组切机扰动是频率稳定相关研究中常见的扰动设置[4,7]，用以评估严重扰动下的系统频率稳定。因此，本文采用了此常见设置作为案例研究中的系统扰动场景，即设置发电机 10 在 0.1 s 切机。风电场参数设为：$P_{wri} = 5$ p. u.，$v_{ini} = 4$ m/s，$v_{ri} = 10$ m/s，$v_{outi} = 22$ m/s[29]。光伏电站参数设为：$S_j = 1.33$ km$^2$，$\eta_j = 15\%$[17]。系统中的不确定性参数如表 1 所示。算例 1 的系统结构如图 2 所示。

**表 1　算例 1 的不确定性参数**

Tab. 1　Uncertainty parameters in case 1

| 类型 | 位置(节点编号) | 参数 |
|---|---|---|
| 风电场 | 19 | Weibull(2, 5, 3.5) |
| 光伏电站 | 2 | Beta(2, 3) |
| 负荷 | 29 | Gaussian(0, 1) |

采用 5 000 次 MCS 结果作为基准结果[13]验证本文提出方法的有效性。由于本文所提出的方法为传统 PCE 方法的改进方法，因此，将结果与传统 PCE 方法进行对比。而传统 PCE 不能处理服从 Weibull 分布以及存在相关性的随机变量，因此，采用现有文献中的常见做法[17,26-27]，将随机变量首先经 Cholesky 分解及等概率变换等操作转换为独立随机变量，再进行 PCE 计算得到与本文所提出方法的对比方案结果。同时，为与单独使用传统 PCE 做区分，将本文的对比方案命名为改进 PCE(improved

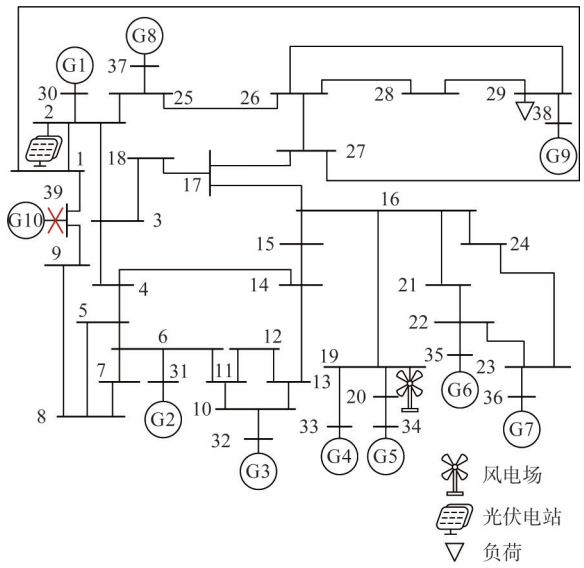



图 2 IEEE 39 节点系统结构图

Fig. 2 Diagram of IEEE-39 bus system

PCE，IPCE）。PCE 类方法的效果受参数影响，且在不同场景中的效果存在差异，因此，方法参数按现有文献常见的选取方式[25]，即 $N_S = 400$，$N_O = 4$。同时由于案例中的不确定性规模较小，所提方法中待定系数数量较少，因此将双曲截断参数选为 $s = 1$。首先，利用本文所提方法对系统频率稳定性指标 FN 与|RoCoF|的 PDF 进行计算，计算时间以及 PDF 计算结果分别如图 3—4 所示。同时，采用均值绝对误差、标准差绝对误差以及概率函数的 Wasserstein 距离量化频率稳定性指标计算结果的准确度，结果如图 5 所示。此外，为展现参数选取对所提方法效果的影响，在图 6 中展示了所提方法在算例 1 中的 FN 的 PDF 均值绝对误差随参数变化的灵敏度分析。

根据图 3 结果，不论是采用 IPCE 方法还是本文所提方法，由于所需的仿真次数远小于 MCS，因此，

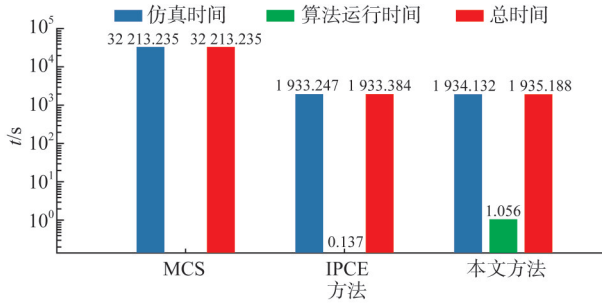



图 3 算例 1 的计算时间

Fig. 3 Calculation time in case 1

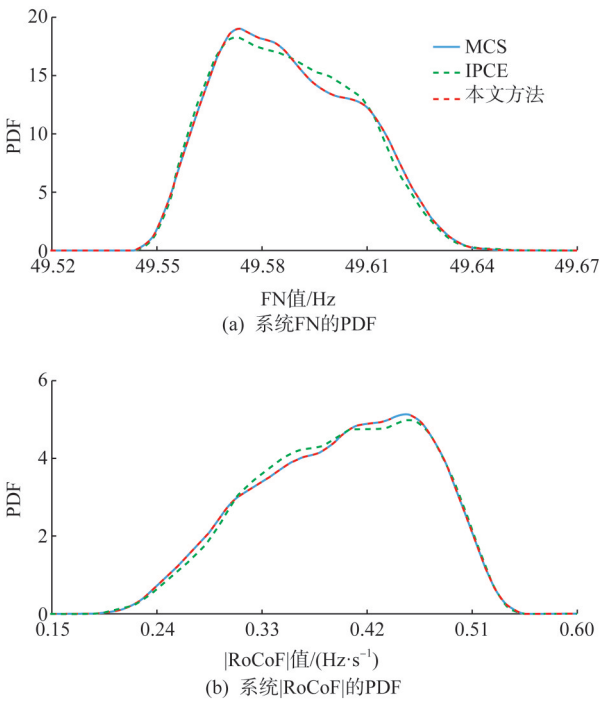



图 4 算例 1 中频率稳定性指标的 PDF 计算结果

Fig. 4 PDF results of frequency stability indices in case 1

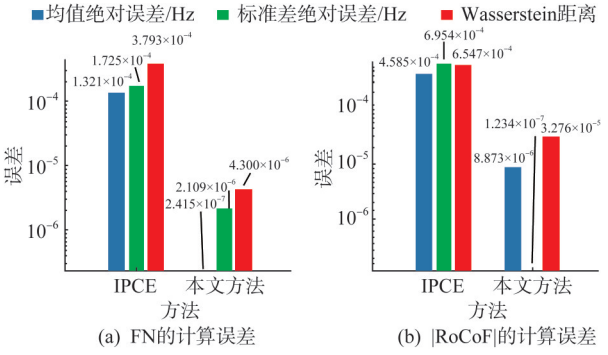
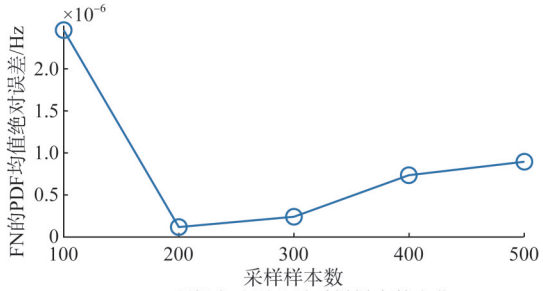



图 5 算例 1 中频率稳定性指标的计算误差

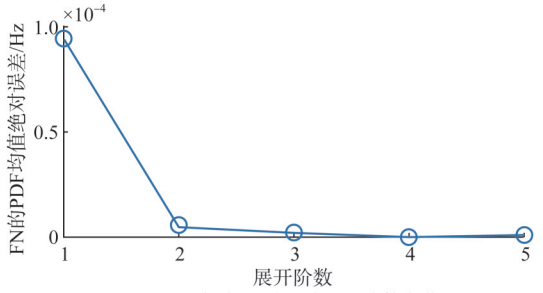
Fig. 5 Result errors of frequency stability indices in case 1

总的计算时间相较于 MCS 有显著提升。另外，对比 IPCE 方法和本文提出的方法，由于设定的仿真次数相同，因此仿真时间几乎相同。但在算法运行时间上，本文方法要大于 IPCE 方法。主要原因在于本文方法在仿真前需要进行 LHS 操作，耗时略大于随机采样，同时正交多项式基函数的构建时间也略大于直接选取 Askey 方案中的基函数构建方式。但是，由于算法运行时间远小于仿真时间，因此相比于 IPCE 方法，本文方法的计算总时间并没有显著增加。

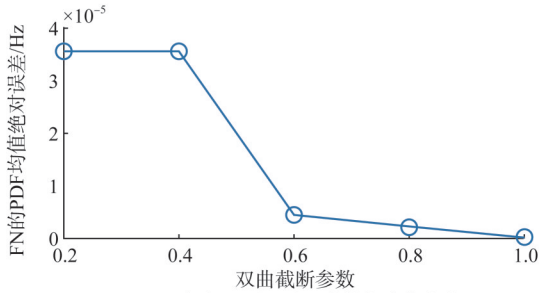
由图 4—5 的计算结果可知，虽然 IPCE 方法与本文方法都能够对 FN 与|RoCoF|的进行估计，但本文方法得到的 PDF 与 MCS 方法得到的 PDF 重合程




(a) 所提方法误差随采样样本数变化




(b) 所提方法误差随展开阶数变化

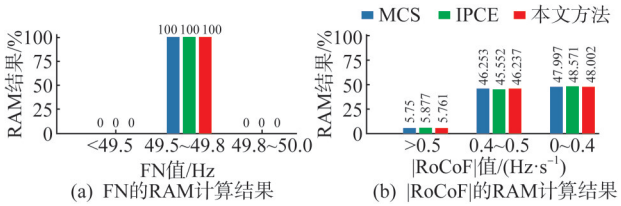



(c) 所提方法误差随双曲截断参数变化

**图 6　算例 1 中所提方法随参数变化的灵敏度分析**

Fig. 6　Sensitivity analysis of the proposed method performance with respect to method parameters in case 1

度更高，均值误差、标准差误差及 Wasserstein 距离结果均更小，表现出更高的计算准确性。同时，基于图 4 的结果可以进一步计算系统频率的风险评估矩阵（risk assessment matrix，RAM），得到系统处于不同频率风险等级的概率[16]，RAM 计算结果如图 7 所示。其中，FN 值<49.5 Hz、|RoCoF|值>0.5 Hz/s 表示高风险；49.5 Hz≤FN 值<49.8 Hz、0.4 Hz/s<|RoCoF|值≤0.5 Hz/s 表示中风险；49.8 Hz≤FN 值≤50 Hz、0 Hz/s≤|RoCoF|值≤0.4 Hz/s 表示低风险。其中，FN 的各风险等级阈值参考文献[11]的设定，|RoCoF|的各风险等级阈值参考文献[13]的设定，上述文献的阈值设定基于英国电网的工业标准[39]。同时，不同国家的频率稳定性指标阈值存在差异[40]，各风险等级阈值可根据待评估系统所属区域及具体需求进行选取设置。




(a) FN的RAM计算结果　　(b) |RoCoF|的RAM计算结果

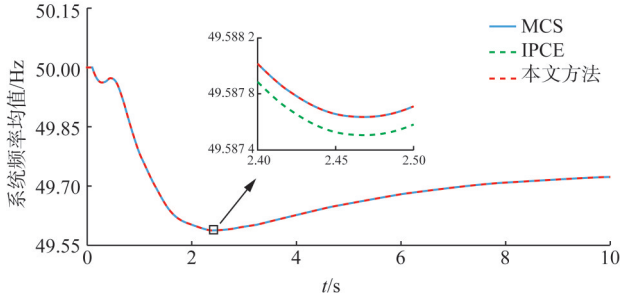
**图 7　算例 1 中 RAM 计算结果**

Fig. 7　Results of RAM in case 1

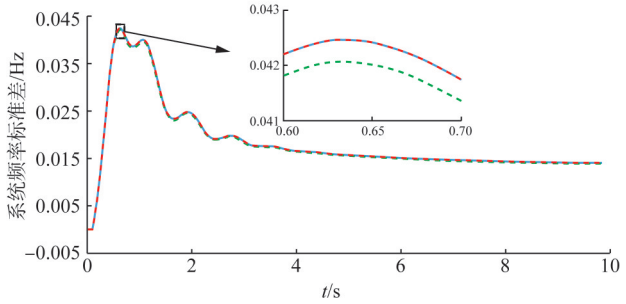
由图 7 可知，对于 FN，系统频率有 100 %的概率处于中风险区，而对于|RoCoF|，则有 5.750 %的概率处于高风险区。RAM 计算结果为可再生能源的接入规划提供了量化的参考。若系统能够接受以上结果的系统频率越限风险，则可以考虑直接将可再生能源接入电网；若不能接受，则需要在接入可再生能源的同时采取额外措施来降低频率越限风险。另外，IPCE 方法计算 RAM 的最大误差为 0.574 %，而本文方法计算的最大误差为 0.016 %，因此，本文方法在计算频率稳定 RAM 的精度更高。

与此同时，RAM 结果给出了系统处于不同频率稳定风险等级的概率，可以结合电网运行要求提高新能源的利用率以及减少调频控制资源的配备降低运行成本。对于传统的确定性频率稳定性评估，通常基于最极端的场景进行计算分析，仅考虑频率稳定性指标是否越限而忽视其出现的概率，将可能会大幅增加本不必要的系统的运行成本或限制新能源的利用率。相比之下，RAM 有助于电网运行人员宏观掌握电网处于各种可能场景下的综合运行状态。同时结合不同电网对系统处于不同风险等级下的概率要求，避免了为满足极端场景的频率不越限而采取的过于保守的措施。以算例 1 为例，在本案例中|RoCoF|处于高风险等级的概率为 5.750 %，若仅考虑极端情况则需要限制新能源出力或额外配置调频资源。而如果该系统要求可接受 6 %的处于高风险等级的可能性，则实际并不需要采取任何措施（需要说明的是，6 %仅为算例系统可接受的高风险等级概率阈值，并非现行电网运行标准规定的可接受概率阈值）。因此，基于 RAM 结果可更合理地利用新能源与配备调频控制资源。

本文提出的方法除了能够对频率稳定性指标进行评估，还能够计算系统频率响应的概率分布。系统频率响应的均值以及标准差如图 8 所示。




(a) 系统频率均值




(b) 系统频率标准差

**图 8 算例 1 中的频率响应的均值标准差计算结果**

Fig. 8 Mean and standard deviation calculation results of frequency response in case 1

由图 8 可知，IPCE 方法与本文方法都能够对频率响应的均值及标准差进行准确计算。但相比之下，本文方法得到的频率响应均值及标准差的曲线与 MCS 方法得到的曲线重合程度更高。对于频率响应均值计算结果，IPCE 方法的最大误差为 $3.382\times10^{-4}$ Hz，而本文方法为 $6.767\times10^{-7}$ Hz。对于频率响应标准差计算结果，IPCE 方法的最大误差为 $4.016\times10^{-4}$ Hz，而本文方法为 $6.451\times10^{-6}$ Hz。因此，本文方法在计算频率响应的准确率更高。

### 4.2 算例 2：不确定性存在相关性

算例 2 采用 IEEE 68 节点系统[12]，并设置最大出力机组发电机 16 在 0.1 s 切机，系统中的不确定性参数如表 2 所示，其余参数选取与算例 1 相同。由于传统 PCE 方法不能处理不确定性存在相关性的情况，所对比的 PCE 结果为首先采用式(7)将相关随机变量转化为独立随机变量，然后再进行 PCE 计算得到的结果。算例 2 的系统结构如图 9 所示。

**表 2 算例 2 的不确定性参数**

Tab. 2 Uncertainty parameters in case 2

| 类型 | 位置(节点编号) | 参数 |
|---|---|---|
| 风电场 | 31,38 | Weibull(2, 5, 3.5),$\rho$=0.7 |
| 光伏电站 | 10,11 | Beta(2, 3),$\rho$=0.6 |
| 负荷 | 47,48 | Gaussian(0, 1),$\rho$=0.5 |

利用本文提出方法对系统及区域频率稳定的指标 FN 与|RoCoF|的 PDF 进行计算，计算时间、PDF 计算结果以及计算结果误差如图 10—12 所示。

根据图 10 可知，与算例 1 中计算时间结果类似，IPCE 方法以及本文方法的计算时间都显著小于 MCS 方法，其中 IPCE 方法的算法运行时间略短

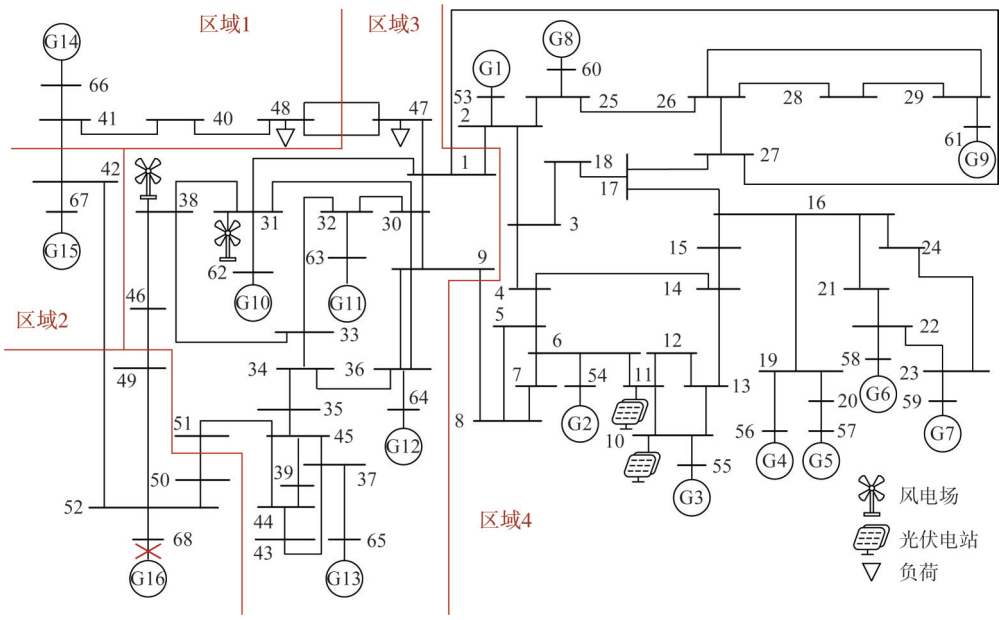



**图 9 IEEE 68 节点系统结构图**

Fig. 9 Diagram of IEEE-68 bus system

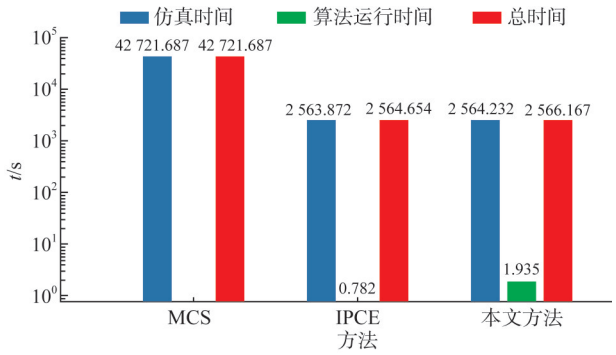



**图 10　算例 2 的计算时间**

Fig. 10　Calculation time in case 2

于本文方法。但是，对比算例 1 中的算法运行时间可发现，算例 2 中 IPCE 方法的计算时间是算例 1 中的 5.7 倍，而本文方法仅为 1.8 倍。在算法运行时间的增加比例上，由于本文方法采用了双曲线截断，所需要形成的正交多项式项数更少，因而增加的算法运行时间的比例更小。

另外，由图 11—12 可知，除部分区域的频率稳定性指标的均值绝对误差高于 IPCE 方法，本文方法的标准差误差与 Wasserstein 距离结果均更小。在计算 FN 与|RoCoF|的 PDF 上，相比于 IPCE 方法，本文方法得到的 FN 与|RoCoF|的 PDF 与 MCS 方法得到的 PDF 重合程度更高，概率分布整体逼近精度更高。同时，虽然 IPCE 方法计算结果较为准确，但存在准确度不能始终保持在较高水平的情况，即区域 3 的 FN 与|RoCoF|以及系统|RoCoF|的 PDF 计算结果与 MCS 方法得到的 PDF 相差较大，而其余计算结果相对准确。主要原因在于算例 2 中随机变量数为 6，根据式(15)，此时 IPCE 具有 210 个待定系数，而样本数量仅为 300，已不满足 $N_S \geqslant 2N_P$ 的条件，因此导致待定系数的计算不准确。相比之下，由于采用了双曲线截断，本文方法仅有 90 个待定系数，依然满足 $N_S \geqslant 2N_P$ 的条件。因此，在图 11 中，本文方法得到的 FN 与|RoCoF|的 PDF 与 MCS 方法得到的 PDF 存在高度重合，体现了本文方法在处理多随机变量存在相关性时的优越性。

利用图 11 的结果计算系统及各区域频率稳定指标的 RAM，结果如图 13 所示。由图 13 可知，虽然系统频率的 FN 以及|RoCoF|处在低风险的概率为 100 %，但是不同区域的 FN 以及|RoCoF|的 RAM 各不相同，区域频率仍存在处于中风险甚至高风险的可能性，因此在对系统进行频率稳定评估时不仅要考虑

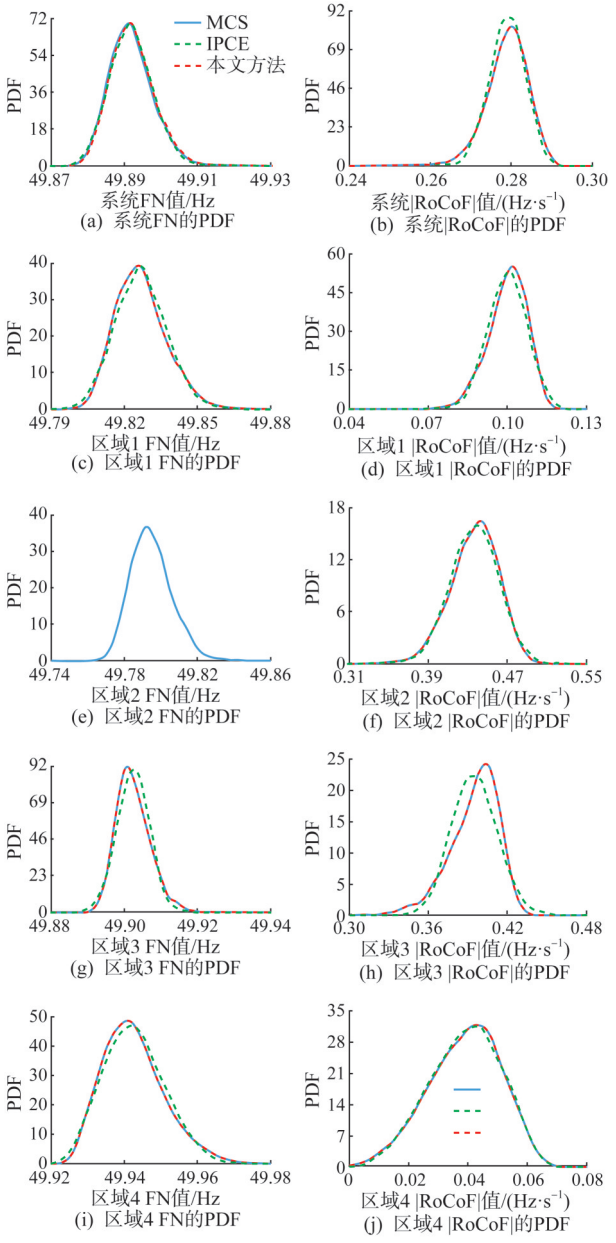



**图 11　算例 2 中的频率稳定性指标的 PDF 计算结果**

Fig. 11　PDF results of frequency stability indices in case 2

系统的频率稳定，同时也要兼顾各区域的频率稳定。此外，由于 IPCE 方法对频率稳定指数的 PDF 计算误差较大，导致 RAM 的计算也存在较大误差，最大误差达到 6.794 %。相比之下，本文方法计算 RAM 的最大误差为 0.107 %，误差始终保持在较低水平。

最后，利用本文提出的方法计算系统频率响应的均值以及标准差，如图 14 所示。

由图 14 可知，IPCE 方法受限于存在维数灾问题，当考虑多个随机变量时，待定系数与样本数已不满足 $N_S \geqslant 2N_P$ 的条件，对算例 2 中的频率响应的

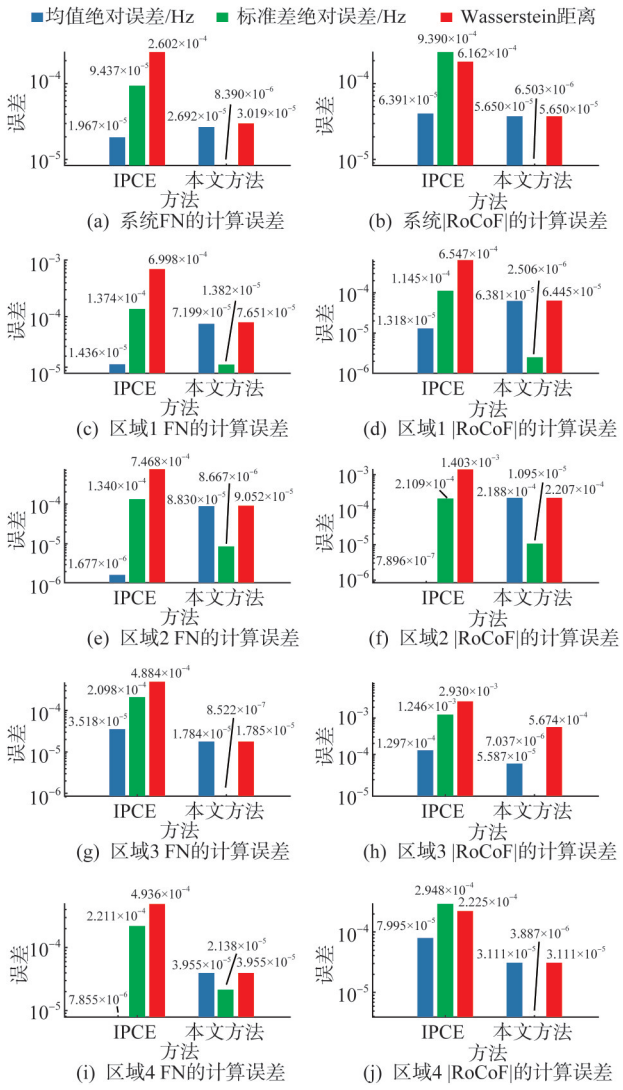



图 12 算例 2 的频率稳定性指标的计算误差

Fig. 12 Result errors of frequency stability indices in case 2

均值与标准差计算与通过 MCS 方法得到的值存在一定偏差，最大误差为 $3.584 \times 10^{-4}$ Hz。相比之下，本文方法计算得到的频率响应均值与标准差曲线与 MCS 方法得到的曲线存在高度重合，最大误差为 $9.263 \times 10^{-5}$ Hz。因此，本文方法在计算多个相关随机变量所导致的频率响应变化仍具有较高的准确率。

## 5 结论

本文提出了一种基于广义多项式混沌展开的电力系统概率频率稳定性评估方法，考虑了风电、光伏以及负荷的不确定性对频率稳定的影响。算例分析在 IEEE 39 节点以及 IEEE 68 节点系统中进行，

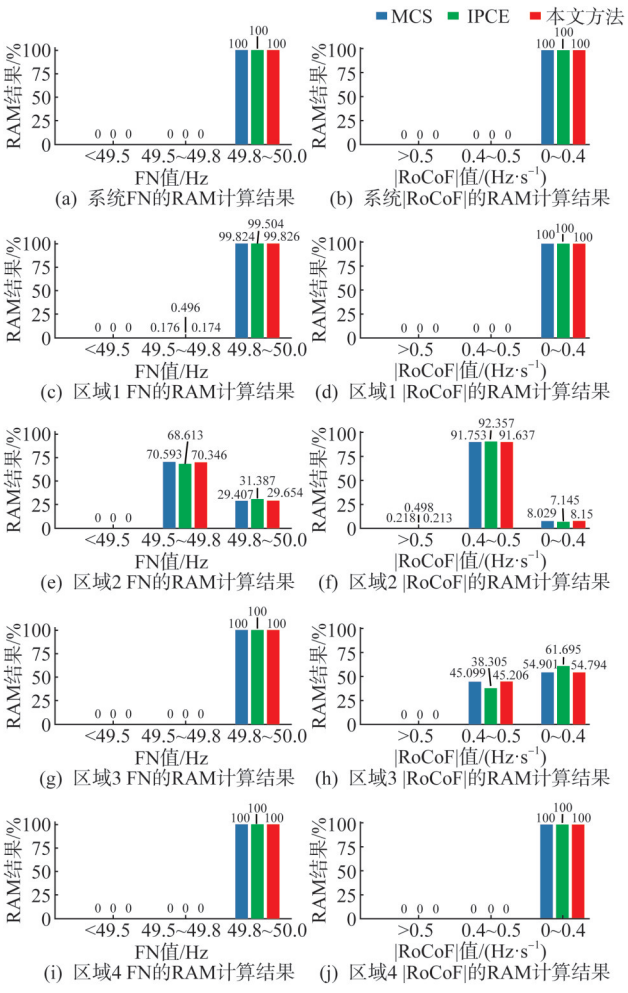



图 13 算例 2 中的 FN 的 RAM 计算结果

Fig. 13 FN results of RAM in case 2

用以验证所提方法的有效性。主要结论如下。

1)针对传统 PCE 方法存在的缺陷，本文提出的方法能够处理服从任意分布的独立以及相关随机变量，同时缓解了维数灾问题。算例分析的结果表明相比于 MCS 方法，本文的方法大幅降低了计算时间，同时具有比传统 PCE 方法更高的准确性。

2)本文提出的方法不仅能够应用于对系统及区域频率稳定性指数的计算，同时能够用于计算频率风险评估矩阵以及频率响应，可为系统及区域频率稳定提供多方面评估。

随着可再生能源的广泛接入，其随机性与波动性将对系统的稳定运行产生影响。未来将侧重于本文所提方法在不同应用场景的鲁棒性、在考虑高维不确定性大规模实际系统中的适用性、以及在电力系统其他类型的概率稳定性评估的拓展性研究，为构建新型电力系统过程中规划可再生能源大规模接

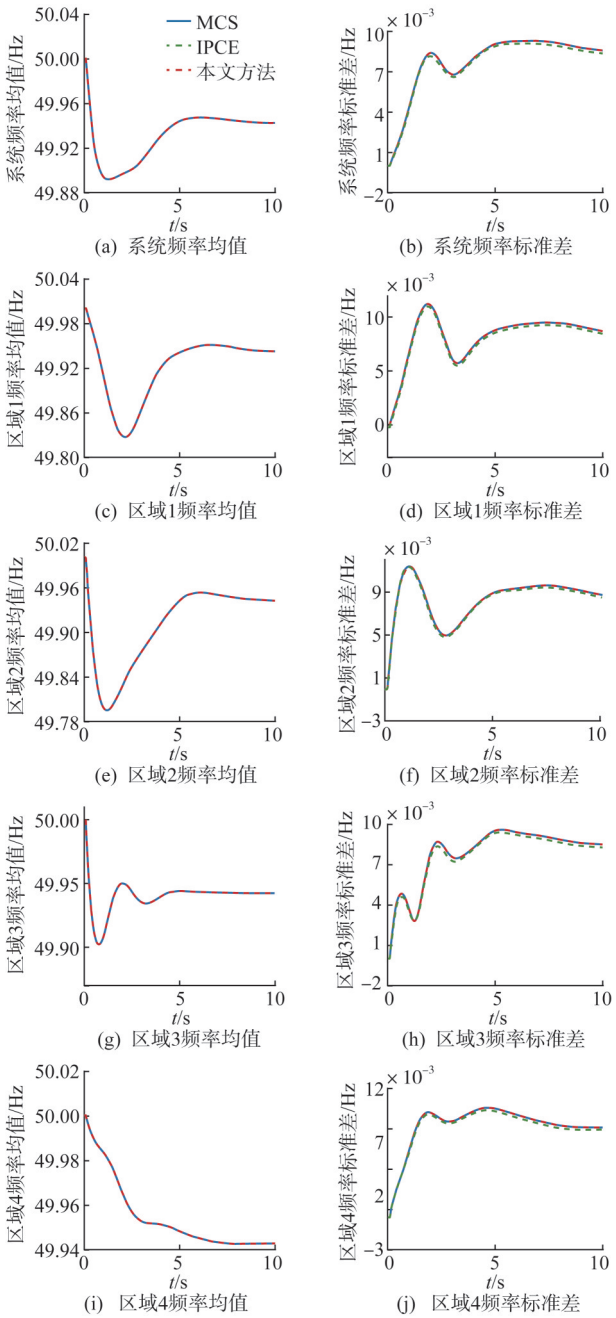



**图 14　算例 2 中的频率响应的均值与标准差计算结果**

Fig. 14　Mean and standard deviation calculation results of frequency response in case 2

入提供参考。

## 参考文献


[1] 别朝红，任彦哲，李更丰，等. “双碳”目标下城市能源系统的形态结构和发展路径[J]. 电力系统自动化，2022，46(17)：3－15.
BIE Zhaohong，REN Yanzhe，LI Gengfeng，et al. Morphological structure and development path of urban energy system for carbon emission peak and carbon neutrality[J]. Automation of Electric Power Systems，2022，46(17)：3－15.

[2] 严新荣，张宁宁，马奎超，等. 我国海上风电发展现状与趋势综述[J]. 发电技术，2024，45(1)：1－12.
YAN Xinrong，ZHANG Ningning，MA Kuichao，et al. Overview of current situation and trend of offshore wind power development in China [J]. Power Generation Technology，2024，45(1)：1－12.

[3] 张冠锋，杨俊友，王海鑫，等. 基于虚拟同步机技术的风储系统协调调频控制策略[J]. 电工技术学报，2022，37(S1)：83－92.
ZHANG Guanfeng，YANG Junyou，WANG Haixin，et al. Coordinated frequency modulation control strategy of wind farm-storage system based on virtual synchronous generator technology[J]. Transactions of China Electrotechnical Society，2022，37(S1)：83－92.

[4] ZHANG Z，DU E，TENG F，et al. Modeling frequency dynamics in unit commitment with a high share of renewable energy [J]. IEEE Transactions on Power Systems，2020，35(6)：4383－4395.

[5] 陈文倩，辛小南，程志平. 基于虚拟同步发电机的光储并网发电控制技术[J]. 电工技术学报，2018，33(S2)：538－545.
CHEN Wenqian，XIN Xiaonan，CHENG Zhiping. Control of grid-connected of photovoltaic system with storage based on virtual synchronous generator [J]. Transactions of China Electrotechnical Society，2018，33(S2)：538－545.

[6] EHSAN A，YANG Q. State-of-the-art techniques for modelling of uncertainties in active distribution network planning：a review[J]. Applied Energy，2019(239)：1509－1523.

[7] MOCHAMAD F R，PREECE R，HASAN K N. Probabilistic multi-stability operational boundaries in power systems with high penetration of power electronics[J]. International Journal of Electrical Power & Energy Systems，2022(135)：107382.1－107382.12.

[8] ADREES A，PAPADOPOULOS P N，MILANOVIC J V. A framework to assess the effect of reduction in inertia on system frequency response[C]//2016 IEEE Power and Energy Society General Meeting（PESGM），July 17－21，2016，Boston，USA. New York：IEEE，2016：1－5.

[9] AHMADI H，GHASEMI H. Maximum penetration level of wind generation considering power system security limits [J]. IET Generation，Transmission & Distribution，2012，6(11)：1164－1170.

[10] WU L，INFIELD D. Power system frequency management challenges－a new approach to assessing the potential of wind capacity to aid system frequency stability [J]. IET Renewable Power Generation，2014，8(7)：733－739.

[11] WEN J，BU S，LI F. Two-level ensemble methods for efficient assessment and region visualization of maximal frequency deviation risk [J]. IEEE Transactions on Power Systems，2023，38(1)：643－655.

[12] WEN J，BU S，XIN H. Probabilistic assessment on area-level frequency nadir/vertex for operational planning[J]. IEEE Open Access Journal of Power and Energy，2021(8)：341－351.

[13] WEN J，BU S，LI F，et al. Risk assessment and mitigation on area-level RoCoF for operational planning [J]. Energy，2021(228)：120632.1－120632.14.

[14] ANDERSON P. M，MIRHEYDAR M. A low-order system frequency response model [J]. IEEE Transactions on Power Systems，1990，5(3)：720－729.

[15] SHI Q，LI F，CUI H. Analytical method to aggregate multi-machine SFR model with applications in power system

dynamic studies[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2018, 33(6): 6355 - 6367.
[16] BU S, WEN J, LI F. A generic framework for analytical probabilistic assessment of frequency stability in modern power system operational planning[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2019, 34(5): 3973 - 3976.
[17] 何琨, 徐潇源, 严正, 等. 基于稀疏多项式混沌展开的孤岛微电网概率潮流计算[J]. 电力系统自动化, 2019, 43(2): 67 - 75.
HE Kun, XU Xiaoyuan, YAN Zheng, et al. Probabilistic power flow calculation of islanded microgrid based on sparse polynomial chaos expansion[J]. Automation of Electric Power Systems, 2019, 43(2): 67 - 75.
[18] 王晗, 严正, 徐潇源, 等. 基于稀疏多项式混沌展开的孤岛微电网全局灵敏度分析[J]. 电力系统自动化, 2019, 43(10): 44 - 52.
WANG Han, YAN Zheng, XU Xiaoyuan, et al. Global sensitivity analysis for islanded microgrid based on sparse polynomial chaos expansion[J]. Automation of Electric Power Systems, 2019, 43(10): 44 - 52.
[19] 何琨, 严正, 徐潇源, 等. 基于Sobol'法的孤岛微电网潮流全局灵敏度分析[J]. 电力系统自动化, 2018, 42(14): 99 - 106.
HE Kun, YAN Zheng, XU Xiaoyuan, et al. Sobol' method based global sensitivity analysis of power flow in islanded microgrid[J]. Automation of Electric Power Systems, 2018, 42(14): 99 - 106.
[20] WANG H, YAN Z, XU X, et al. Probabilistic power flow analysis of microgrid with renewable energy[J]. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 2020(114): 105393.1 - 105393.10.
[21] JIANG Y, REN Z, SUN Z, et al. A stochastic response surface method based probabilistic energy flow analysis method for integrated electricity and gas systems[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2022, 37(3): 2467 - 2470.
[22] YE K, ZHAO J, YANG R, et al. A generalized Copula-polynomial chaos expansion for probabilistic power flow considering nonlinear correlations of PV injections[C]//2020 52nd North American Power Symposium, April 11 - 13, 2021, Tempe, USA. New York: IEEE, 2021: 1 - 6.
[23] PREECE R, WOOLLEY N C, MILANOVIĆ J V. The probabilistic collocation method for power-system damping and voltage collapse studies in the presence of uncertainties[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2013, 28(3): 2253 - 2262.
[24] 马燕峰, 刘佳, 闫纪源. 基于随机响应面法的含风电电力系统小扰动稳定性分析[J]. 电工技术学报, 2017, 32(6): 49 - 57.
MA Yanfeng, LIU Jia, YAN Jiyuan. Small disturbance stability analysis of power system containing wind power based on stochastic response surface method[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2017, 32(6): 49 - 57.
[25] XU Y, MILI L, SANDU A, et al. Propagating uncertainty in power system dynamic simulations using polynomial chaos[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2019, 34(1): 338 - 348.
[26] YE K, ZHAO J, DUAN N, et al. Stochastic power system dynamic simulation and stability assessment considering dynamics from correlated loads and PVs[J]. IEEE Transactions on Industry Applications, 2022, 58(6): 7764 - 7775.
[27] FAN M, LI Z, DING T, et al. Uncertainty evaluation algorithm in power system dynamic analysis with correlated renewable energy sources[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2021, 36(6): 5602 - 5611.
[28] HASAN K N, PREECE R, MILANOVIĆ J V. Existing approaches and trends in uncertainty modelling and probabilistic stability analysis of power systems with renewable generation[J]. Renewable and Sustainable Energy Reviews, 2019(101): 168 - 180.
[29] BU S Q, DU W, WANG H F, et al. Probabilistic analysis of small-signal stability of large-scale power systems as affected by penetration of wind generation[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2012, 27(2): 762 - 770.
[30] LUO J, ZOU Y, BU S, et al. Converter-Driven stability analysis of power systems integrated with hybrid renewable energy sources[J]. Energies, 2021, 14(14): 1 - 20.
[31] XU X, YAN Z, SHAHIDEHPOUR M, et al. Power system voltage stability evaluation considering renewable energy with correlated variabilities[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2018, 33(3): 3236 - 3245.
[32] 国家市场监督管理总局,国家标准化管理委员会. 电网运行准则: GB/T 31464—2022[S]. 北京: 中国标准出版社, 2022.
[33] 国家市场监督管理总局, 中国国家标准化管理委员会. 电力系统安全稳定导则: GB 38755—2019[S]. 北京: 中国电力出版社, 2019.
[34] XIONG L, LIU X, LIU Y, et al. Modeling and stability issues of voltage-source converter-dominated power systems: a review[J]. CSEE Journal of Power and Energy Systems, 2022, 8(6): 1530 - 1549.
[35] 国家市场监督管理总局, 中国国家标准化管理委员会. 电力系统自动低频减负荷技术规定: GB/T 40596—2021[S]. 北京: 中国标准出版社, 2021.
[36] XIU D, KARNIADAKIS G E M. Modeling uncertainty in flow simulations via generalized polynomial chaos[J]. Journal of Computational Physics, 2003, 187(1): 137 - 167.
[37] BLATMAN G, SUDRET B. Adaptive sparse polynomial chaos expansion based on least angle regression[J]. Journal of Computational Physics, 2011, 230(6): 2345 - 2367.
[38] YE K, ZHAO J, DUAN N, et al. Physics-informed sparse gaussian process for probabilistic stability analysis of large-scale power system with dynamic PVs and loads[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2023, 38(3): 2868 - 2879.
[39] National Energy System Operator (NESO). Security and Quality of Supply Standard (SQSS)[EB/OL]. [2026 - 06 - 15]. https://www.neso.energy/industry-information/codes/security-and-quality-supply-standard-sqss.
[40] 李国庆, 刘先超, 辛业春, 等. 含高比例新能源的电力系统频率稳定研究综述[J]. 高电压技术, 2024, 50(3): 1165 - 1181.
LI Guoqing, LIU Xianchao, XIN Yechun, et al. Research on frequency stability of power system with high penetration renewable energy: a review[J]. High Voltage Engineering, 2024, 50(3): 1165 - 1181.

**收稿日期**: 2026-05-01

**作者简介**:

卜思齐(1984), 男, 教授, 博士生导师, 博士, 研究方向为电网稳定运行与分析、电网运维与健康管理、灵活性与市场交易、可再生能源并网、智能电网、电力交通网和物理信息系统, siqi.bu@polyu.edu.hk;

王照远(1995), 男, 通信作者, 助理工程师, 博士, 研究方向为电力系统不确定性量化、电力物理信息系统稳定性分析, zhaoyuan.wang@connect.polyu.hk。