文章编号：1674-0629(2026)09-0079-10 中图分类号：TM411 文献标志码：A
DOI：10.13648/j.cnki.issn1674-0629.2026.09.007

基于 POD-ERBFLP 的时谐磁场快速计算方法

李耕宇，刘刚，袁海钦，寇家俊，刘云鹏
（华北电力大学河北省输变电设备安全防御重点实验室，河北 保定 071003）

摘要：为了快速获取电气设备的瞬态磁场变化及损耗，研究时谐磁场的快速计算方法具有重要意义。通过使用时谐场仿真与本征正交分解—代理模型相结合的方法，实现了对高次谐波下磁场分布与损耗的快速计算。为了提高计算方法的精度，引入了一种能够自动选择线性多项式阶数的改进径向基函数响应面模型。与包含线性多项式的径向基函数响应面模型相比，该改进模型进一步提升了其工程适用性与计算精度。为验证所提方法的有效性，首先以 TEAM7 为研究对象进行时谐场的全阶仿真与降阶分析，证明了所提方法的准确性。同时，将所提方法与传统径向基函数响应面法以及包含线性多项式的径向基函数方法进行比较，结果显示所提方法在精度上有明显的提升。最后，应用本征正交分解与改进包含线性多项式的径向基函数响应面相结合的方法对一台变压器的时谐磁场进行降阶计算。结果表明，在计算磁场时降阶计算在计算时间上具有显著优势，且相对误差较小。

关键词：时谐场；变压器；POD 分解；响应面模型；ERBFLP

Fast Computational Method for Time-Harmonic Magnetic Fields Based on POD-ERBFLP

LI Gengyu, LIU Gang, YUAN Haiqin, KOU Jiajun, LIU Yunpeng
(Hebei Provincial Key Laboratory of Power Transmission Equipment Security Defense, North China Electric Power University, Baoding, Hebei 071003, China)

Abstract: To rapidly obtain the transient magnetic field variations and losses of electrical equipment, studying fast calculation methods for time-harmonic magnetic fields is of great significance. By combining time-harmonic field simulation with the proper orthogonal decomposition (POD) and surrogate modeling approach, rapid calculation of magnetic field distribution and losses under high-order harmonics is achieved. To improve the accuracy of the calculation method, an improved radial basis function (RBF) response surface model capable of automatically selecting the order of linear polynomials was introduced. Compared to the RBF response surface model incorporating linear polynomials, this improved model further enhances its engineering applicability and computational accuracy. To validate the effectiveness of the proposed method, full-order simulation and reduced-order analysis of the time-harmonic field are first conducted on the TEAM7 problem, demonstrating the accuracy of the proposed approach. Additionally, the proposed method is compared with traditional RBF response surface methods and RBF methods incorporating linear polynomials, with results showing a significant improvement in accuracy. Finally, the POD and improved RBF response surface method with linear polynomials are combined to perform reduced-order calculations for the time-harmonic magnetic field of a transformer. The results indicate that the reduced-order calculation offers a significant advantage in computational time while maintaining relatively small errors.

Key words: time-harmonic field; transformer; POD decomposition; response surface model; ERBFLP

基金项目：国家自然科学基金联合基金资助项目(U23B20135)。
Foundation item: Supported by the National Natural Science Foundation Joint Fund(U23B20135).

0 引言

在变压器运行过程中变压器中的谐波可能会导致其故障或性能下降，大量高次谐波分量会在绕组和金属元件中引起额外损耗[1-4]。因此，准确计算与分析含谐波条件下变压器的磁场及损耗分布对其安全稳定运行至关重要。然而，时域方法在计算含有大量高次谐波瞬态磁场问题的时间成本相当高昂，因此一般采用相对高效的时谐磁场代替瞬态磁场来分析高次谐波下磁场及损耗[5-7]。

目前，含有高次谐波的时谐磁场一般为非正弦周期稳态磁场，常见的数值计算方法有时步有限元法[8]、时间周期有限元法[9]和谐波平衡有限元法[10-11]等。这些方法分析时谐磁场问题时相较于瞬态时步法已大幅缩短计算时间，但仍难以满足产品级变压器快速设计迭代的计算需求。

针对仿真或编程计算物理场效率较低的问题，部分学者开展了基于降阶法的快速计算方法研究。降阶计算方法通常包括本征正交分解(proper orthogonal decomposition，POD)[12-14]、线性判别分析、独立成分分析等。近年来，POD作为一种简单而有效的数据降维和特征提取算法，被广泛应用在各类物理场计算中。但是作为一种线性方法，如同线性降维方法存在的共性问题一样，POD对非线性数据或含有复杂非线性关系的大规模数据，可能无法捕捉到所有的变化模式，降阶计算效率遇到了瓶颈，而现有研究中已出现如基于非线性规划的最优降阶方法这类针对非线性场景的优化方案，也从侧面印证了这一瓶颈的存在。目前已有几种方法能够解决该问题，如胡万君针对稳态温度场中提出了一种POD-离散经验插值降阶算法[15]。池骋提出了一种QR分解的局部离散经验插值降阶计算方法用于分析换流变压器非线性热电耦合问题[16]。Nguyen提出了一种最佳点插值方法[17]。

上述方法对降阶计算的效率实现了部分改善，但是面对大型设备如产品级变压器时，大型稀疏方程组对应超大规模矩阵，降阶计算复杂度较高，需要耗费大量的计算资源和时间。特别是在高维数据的情况下，由于高维特征存在较大的冗余性与不相关性，会降低算法的效率和性能，采用POD计算可能变得非常低效，甚至类似大多数解决大规模问题的算法，在超过1 000 D的数据上效果很差。为了解决这些问题，应用代理模型的方法来辅助POD应运而生。代理模型是对原始数据进行近似建模的方法，采用较小规模的数据集或简化的数学模型代替原始数据，从而降低计算复杂性和存储需求。该方法可有效降低POD的计算复杂度和存储需求，同时满足精度的要求。得到POD提取的模态系数后，将其引入人工神经网络、支持向量机等机器学习算法，可有效求解大规模工程计算问题。目前已有国内学者将代理模型应用于其他领域的POD降阶计算研究中，如对静气动弹性分析采用POD-Kriging的方法进行研究[18]，采用POD-反向传播神经网络预测模型及结冰条件[19]，对航空发动机燃烧室设计采用POD-多项式混沌展开-Kriging模型[20]等。目前从电磁场分析应用领域整体应用维度来看，仍存在进一步探索的空间。

针对上述研究现状，本文基于增加二阶线性多项式的径向基响应面方法(radial basis function including linear polynomial，RBFLP)[21]，提出了一种自动选择线性多项式阶数的改进RBFLP响应面模型(excellent radial basis function including linear polynomial，ERBFLP)与POD相结合的时谐磁场快速计算方法。为验证所提方法的有效性，采用不同方法对TEAM第7问题基准模型进行了对比分析，并将该POD-ERBFLP模型应用于一台三相电力变压器磁场的分析计算中。

1 基于POD-ERBFLP降阶的时谐磁场计算模型

1.1 时谐磁场有限元离散格式

在时谐磁场中，激励电流源的大小通常随时间t呈正弦变化，且磁场的角频率ω>0，时谐因子设为$e^{j\omega t}$。基于矢量磁位$\boldsymbol{A}$及其相位φ的方法建立的时谐磁场控制方程和边界条件相关推导可见文献[22]，本文不再赘述。根据时谐磁场控制方程和边界条件，采用伽辽金法对其进行有限元离散，其离散形式如式(1)所示，推导过程详见文献[23]。

$$\boldsymbol{KX}=\boldsymbol{F} \tag{1}$$

式中：$\boldsymbol{K}$为离散控制方程的刚度矩阵；$\boldsymbol{X}$为解向量；$\boldsymbol{F}$为右端项。

将单元刚度阵元素累加可得到整体刚度阵，待求节点未知数向量$\boldsymbol{X}_k$如下。

$$\begin{cases} \boldsymbol{X} = [\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{X}_2^{\mathrm{T}}, \cdots, \boldsymbol{X}_n^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{X}_k = [\boldsymbol{A}_{xk}, \boldsymbol{A}_{yk}, \boldsymbol{A}_{zk}, \varphi_k]^{\mathrm{T}}, k = 1, 2, \cdots, n \end{cases} \tag{2}$$

式中：n为节点数量；T为转置；$\boldsymbol{A}_{xk}$、$\boldsymbol{A}_{yk}$、$\boldsymbol{A}_{zk}$分别为节点k的矢量磁位的3个分量；φ_k为节点k的标量电位。

小型变压器根据有限元离散方程直接进行仿真或编程计算求解时速度较快，但对产品级变压器进行仿真或编程求解时，其离散方程组阶数过高，求解时间过长，无法满足快速计算的需求。

1.2　POD原理

本征正交分解(proper orthogonal decomposition，POD)是一种数值计算方法，用于对多维特征信息进行低维近似描述，从而提取复杂随机过程的主要特征。POD的第一步是建立由部分数据集构成的矩阵，通常称作快照矩阵。在时谐磁场运算中，可以在样本空间中选取n个不同工况，在不同工况下提取的各节点磁感应强度集合称为快照矩阵。该矩阵的列数据可以通过时谐磁场有限元编程计算不同谐波情况得到，也可以通过仿真软件计算得到。本文中采用仿真数据构建快照矩阵$\boldsymbol{B}$=[B_1，B_2，…，B_i，…，B_n](B_i为工况i下的磁感应强度集合)，以便进行后续的降阶计算。

得到快照矩阵$\boldsymbol{B}$后，对其进行奇异值分解，如式(3)所示。

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

式中：$\boldsymbol{V}$为原始域的正交基系数矩阵；$\boldsymbol{U}$为标准正交基底矩阵。

由于前d(d<<n)奇异值的数值远远大于之后的奇异值，因此前d(d<<n)就能捕捉到99 %的广义“能”，如式(4)所示。

$$\frac{\sum_{i=1}^{d}\xi_i^2}{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2} \geqslant 99\ \% \tag{4}$$

式中ξ_i为第i个奇异值。

根据选取的前d项奇异值，即可选取对应的正交基和正交基系数，快照矩阵的各项可以近似表示为图1。

$\boldsymbol{B}$的计算公式如式(5)所示。

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} \approx \tilde{\boldsymbol{U}}\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}\tilde{\boldsymbol{V}}^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

式中：$\tilde{\boldsymbol{U}}$为截断后的正交基矩阵；$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$为截断后的奇异值矩阵；$\tilde{\boldsymbol{V}}$为截断后的右正交矩阵；$\boldsymbol{\alpha}$=$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}\tilde{\boldsymbol{V}}^{\mathrm{T}}$为降阶后的模态系数矩阵。

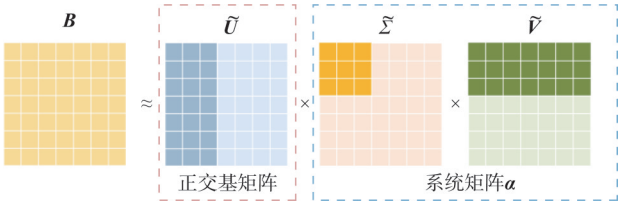


图1　POD方法原理

Fig. 1　Principle of POD method

值得注意的是，上式中正交基$\tilde{\boldsymbol{U}}$保持不变，而$\boldsymbol{\alpha}$受激励和边界条件等因素影响。传统方法在激励与边界条件改变后，通过求解全阶或降阶方程得到对应解；但对于非线性问题，降阶方程的求解仍需调用全阶方程的信息，因此求解效率的提升十分有限。

为了解决非线性降阶方程求解效率的瓶颈，本文拟通过增广形式的径向基函数响应面法构建与实际模型相关的POD模态系数响应面模型。相关理论如下。

1.3　RBFLP原理

径向基函数标签传播算法(RBF-based label propagation，RBFLP)是半监督学习中结合RBF核函数与标签传播的一种方法，其中RBF为径向基函数(radial basis functions)，是一种常用的机器学习方法，通过选择合适的基函数中心和参数可以灵活地拟合各种非线性关系，并且具有较好的泛化能力[24-25]，如式(6)所示。

$$f(x) = \sum_{i=1}^{q}\lambda_i\phi\left(\left\|x - x_i\right\|\right), x \in \mathrm{R}^{n\times 1}, x_i \in X \tag{6}$$

式中：$f(x)$为径向基函数响应面函数；λ_i为第i个响应面系数；$\phi(\cdot)$为径向基函数；x_i为样本空间中的第i个样本点；X为由所有样本点组成的样本空间；R为实数域；n为输入变量的维数；q为样本点的数量。

本文采用径向基函数的形式为$\phi(r)$=exp(cr^2)即高斯函数，其中c<0；r=‖x−x_i‖表示各样本点(电流和频率)到参考点的欧氏距离。其中，样本空间指约束条件内所有可能结果的集合，样本点则是样本空间中每一个具体的可能结果。

基函数决定了模型拟合数据的精度，合理选择基函数的形状、位置与参数，可让径向基函数响应面灵活适配各类数据分布。由于高斯函数拟合非线

性模型应用较为广泛，所以本文选用高斯函数$\phi(r)=\exp(cr^2)$为基函数来拟合模型数据。

RBF是一种常用且高效的方法，特别擅长拟合非线性数据，能够很好地应对复杂非线性关系并捕捉数据中的非线性特征。然而，当系统中包含线性环节时，RBF拟合效果并不理想。为获得更精确的拟合结果，提出了增扩形式的径向基响应面法。该方法通过加入二阶线性多项式来增强径向基响应面的线性拟合效果，如式(7)所示。

$$f(x)=\sum_{i=1}^{q}\lambda_i\phi\left(c\left\|x-x_i\right\|\right)+\sum_{j=1}^{g}\beta_j p_j(x) \tag{7}$$

式中：β_j为第j个多项式项的系数；$p_j(x)$为二阶多项式中的第j个基函数项；g为二阶多项式展开后的项数。式(7)的附加条件为：

$$\sum_{i=1}^{q}\lambda_i p_j(x_i)=0 \tag{8}$$

将式(7)与其约束条件式(8)联立可得如下方程组：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}_{11} & \boldsymbol{\Phi}_{12}\\ \boldsymbol{\Phi}_{21} & \boldsymbol{\Phi}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Lambda}\\ \boldsymbol{\Omega}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{F}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix} \tag{9}$$

式中：$\boldsymbol{\Phi}_{11}$为由各样本点之间径向基函数值构成的径向基函数矩阵；$\boldsymbol{\Phi}_{12}$为由各样本点处多项式基函数值构成的多项式矩阵；$\boldsymbol{\Phi}_{21}$为$\boldsymbol{\Phi}_{12}$的转置；$\boldsymbol{\Phi}_{22}$为0矩阵；$\boldsymbol{\Lambda}$为径向基函数响应面系数向量；$\boldsymbol{\Omega}$为多项式项系数向量；$\boldsymbol{F}$为各样本点对应的响应值向量；$\boldsymbol{0}$为零向量。

通过求解该方程组即可得到RBFLP响应面的各项系数，其中：

$$\boldsymbol{\Phi}_{11}=\begin{bmatrix}\phi_{11} & \cdots & \phi_{1q}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \phi_{q1} & \cdots & \phi_{qq}\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_q\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}f(x_1)\\ \vdots\\ f(x_q)\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{12}=\begin{bmatrix}p_{11} & \cdots & p_{1g}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ p_{q1} & \cdots & p_{qg}\end{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}_{21}=\begin{bmatrix}p_{11} & \cdots & p_{q1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ p_{1g} & \cdots & p_{qg}\end{bmatrix}\boldsymbol{\Omega}=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_g\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{22}=[0]_{g\times g}\quad \boldsymbol{0}=[0]_{g\times 1}$$

式中：$f(x_q)$为第q个样本点对应的响应值；p_{qg}为第q个样本点处第g个多项式基函数项的取值。

1.4 RBFLP改进策略

二阶线性多项式一般形式如式(10)所示。现有方法将二阶多项式与RBF结合以提升径向基响应面的线性拟合效果，但并未探究多项式阶数对系统拟合效果的影响。

$$\begin{Bmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_k\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & x_{11} & \cdots & x_{1n} & x_{11}^2 & \cdots & x_{1n}^2 & x_{11}x_{12} & \cdots & x_{1n}x_{1n-1}\\ 1 & x_{21} & \cdots & x_{2n} & x_{21}^2 & \cdots & x_{2n}^2 & x_{21}x_{22} & \cdots & x_{2n}x_{2n-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_{k1} & \cdots & x_{kn} & x_{k1}^2 & \cdots & x_{kn}^2 & x_{k1}x_{k2} & \cdots & x_{kn}x_{kn-1}\end{bmatrix} \tag{10}$$

式中：k为样本点数量；n为输入变量维数；y_k为第k个样本点对应的多项式响应值；x_{kn}为第k个样本点中第n个输入变量的取值。

针对多项式拟合线性环节问题，本文发现式(10)线性多项式的阶数会影响计算精度。那么是否存在一定的阶数m，使得响应面函数的计算精度最高。为了获取最优的阶数m，本文基于网格搜索法并结合S折交叉验证法，提出了一种选取线性多项式最佳阶数的自适应规则。

网格搜索法是一种用于超参数调优的方法，常用于机器学习算法中。在很多机器学习算法中，存在一些需要手动设定的超参数，而这些超参数会直接影响模型的性能和泛化能力。网格搜索法通过穷举搜索不同超参数的组合，找到最优的超参数组合以获得最佳的模型性能。相对于元启发式优化算法，网格搜索法是一种穷尽式的搜索方法，能保证对所有可能的超参数组合进行尝试，确保不会错过潜在的最优组合。当超参数数量较少(3、4个或者更少)、每个超参数的取值范围或候选值数量不多，也就是超参数的取值范围不大且搜索空间不太复杂的情况下，网格搜索法能够穷举所有组合，找到全局最优解或接近全局最优解的超参数配置。比如在使用网格搜索法选择支持向量机(support vector machine，SVM)模型的最佳超参数时，若设定正则化参数C的候选值为[0.1，1，10]，核函数*kernel*的候选值为['linear','rbf']，通过交叉验证评估每个组合的性能，就能找到如(C=1，*kernel*='rbf')这类最优参数组合。图2为网格搜索方法流程。

在进行网格搜索的同时可以引入S折交叉验证的方法减少偶然性。S折交叉验证是一种用于评估计算模型性能的技术，其基本思想是将数据集划分为S个互不重叠的子集(折)。本文采用5折交叉验证方法，交叉验证的流程如图3所示。

采用网格搜索及交叉验证针对POD-ERBFLP

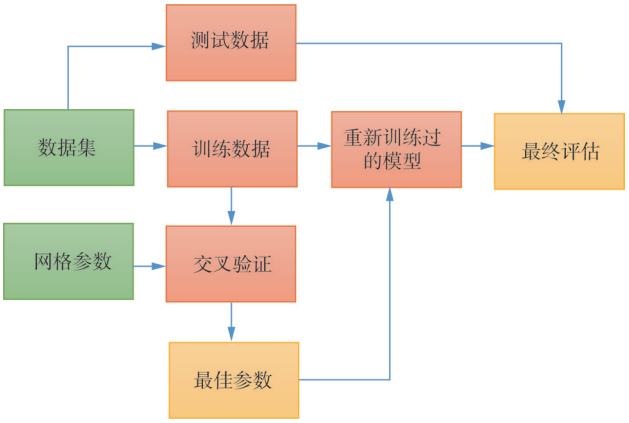


图2　网格搜索流程

Fig. 2　Grid search process

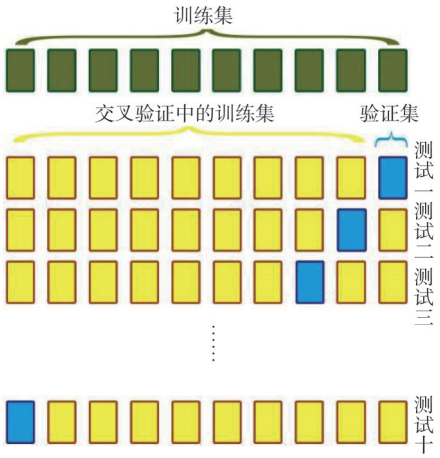


图3　交叉验证环节流程

Fig. 3　Cross-validation process

进行阶数选取的流程如图4所示。

综上，基于POD-ERBFLP的降阶模型构建流程如图5所示。

2　有效性验证

为验证POD-ERBFLP计算方法的快速性与准确性，本节以TEAM第7基准问题模型为例。该模型本身为稳态求解，单匝电流值为1 A。向模型施加不同激励求解时谐磁场作用下的磁场分布。

建立尺寸为700 mm×700 mm×500 mm的空气域，并对模型进行剖分，所有网格均为四面体网格，模型共有57 748个单元和12 311个节点。

为了充分获取模型磁感应强度的数据特征，首先采用最优拉丁超立方采样选取时谐场样本点，该方法相比普通拉丁超立方抽样，可使样本点均匀分布于样本空间，能更好保证后续模型的性能。由于

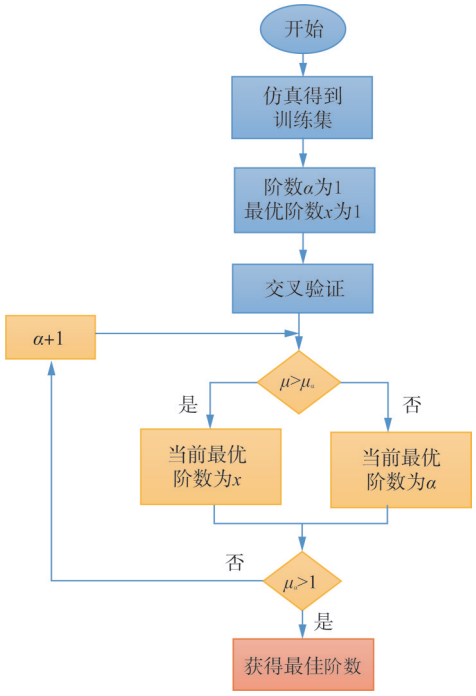


图4　网格搜索最优阶数流程

Fig. 4　Grid-search process for selecting the optimal polynomial order

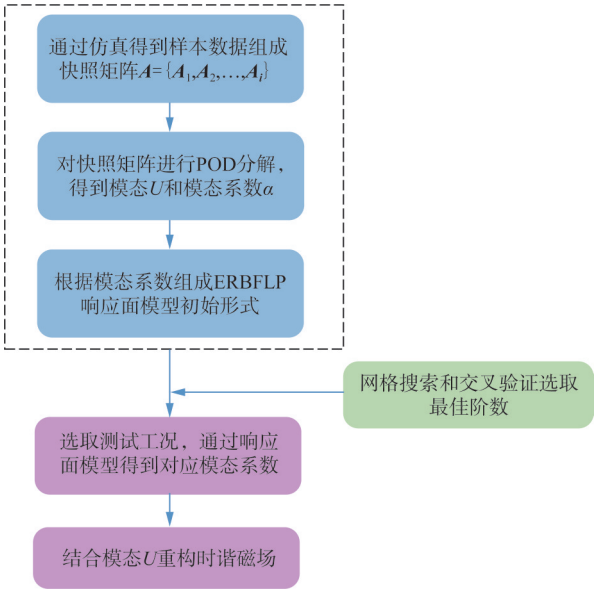


图5　POD-ERBFLP降阶模型构建流程

Fig. 5　Construction of POD-ERBFLP reduced order model

选取样本空间范围不大，考虑样本点选取效率及计算精度共选取30个样本点作为样本数据并完成快照矩阵的构建。对30组样本数据进行网格搜索及交叉验证，网格搜索最佳阶数为4。为验证模型的有效性，选取30组测试点进行降阶计算，编号为1—30。图6为采样点与测试点在样本空间中的分布情况。

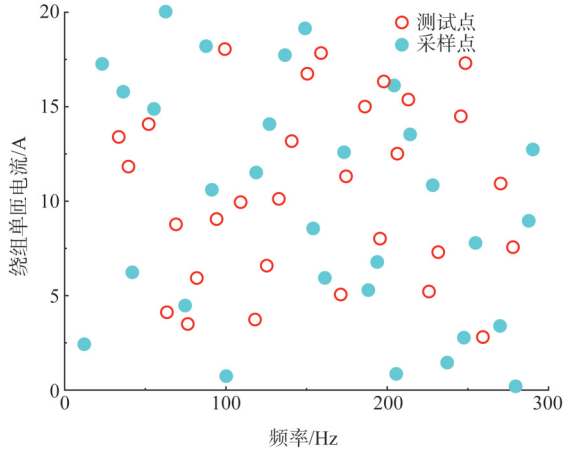


图 6 采样点与测试点选取

Fig. 6 Selection of sampling and test points

根据式(4)可计算样本数据的各阶模态能量占比，进行最佳模态选择，如图 7 所示。

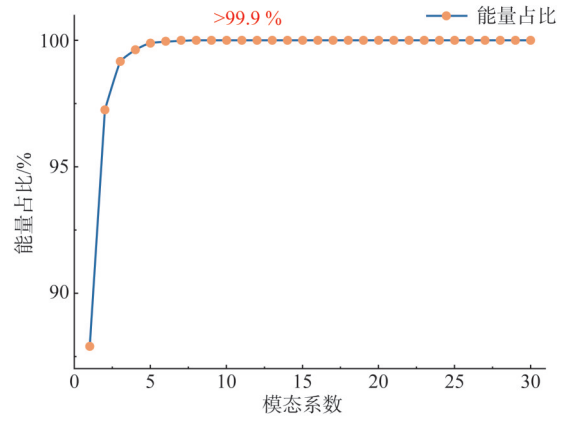


图 7 模态能量占比

Fig. 7 Modal energies proportions

根据图 7 可知，前 10 阶模态能量占比已超过 99.9 %，本文选取前 10 阶模态作为降阶模态。

定义时谐磁场磁感应强度 B 全场域计算平均相对误差如式(11)所示。

$$E_r = \mathrm{sum}\left(\frac{|B_{FOM} - B_{ROM}|}{|B_{FOM}|}\right)/N_{node} \times 100\ \% \quad (11)$$

式中：B_{ROM} 为 POD-ERBFLP 计算结果；B_{FOM} 为仿真计算结果；N_{node} 为磁场节点数量。

图 8 为第 5 组测试工况下的仿真 B_x 云图与降阶计算结果云图对比，最大绝对误差出现在铜板上，仅为 0.001 1 T，验证了该方法降阶计算的可行性。

为验证该响应面模型的优越性，本文以这 30 组测试点展开分析。图 9 为 30 组测试点应用 POD-RBF 模型、POD-RBFLP 模型和 POD-ERBFLP 模型时的平均相对误差。

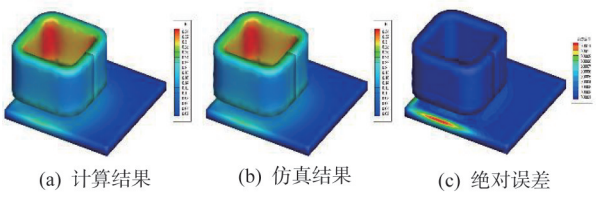


图 8 时谐磁场与降阶计算 B_x 云图对比

Fig. 8 Comparison of time harmonic field and reduced field calculation B_x cloud map

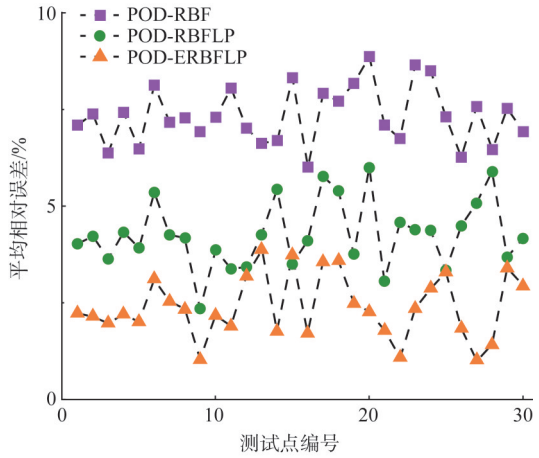


图 9 3 种响应面模型误差对比

Fig. 9 Model errors comparison of the three response surfaces

通过图 9 中 3 种响应面模型对比可以发现，传统的 POD-RBFLP 比 POD-RBF 更加精准，而通过网格搜索法得到线性吻合最好的线性多项式后，POD-ERBFLP 精确度可以得到进一步改善，最大平均相对误差仅为 3.34 %。平均相对误差是评价模型模拟效果的一个重要指标，这一数据充分证明了该算法的有效性与计算的精度。相关研究也有 3 种模型相对误差对比的分析支撑这一模型精度对比结论。

为进一步说明 POD-ERBFLP 的准确性，本文与实测结果进行了比较。根据国际算例公布结果可以得到该模型在 200 Hz、单匝电流值为 1 A 时 y=72 mm、z=34 mm 的空间线段磁通分量 $\boldsymbol{B}_z$ 和 y=72 mm、z=19 mm 的 $\boldsymbol{J}_y$ 实测值[26]。图 10 为本文方法计算值、实测值和有限元软件 COMSOL 计算值对比图。从图 10 中可以看出本文方法计算的 $\boldsymbol{B}_z$ 值和 $\boldsymbol{J}_y$ 值与 COMSOL 软件计算值、实测值相近，偏差

较小。

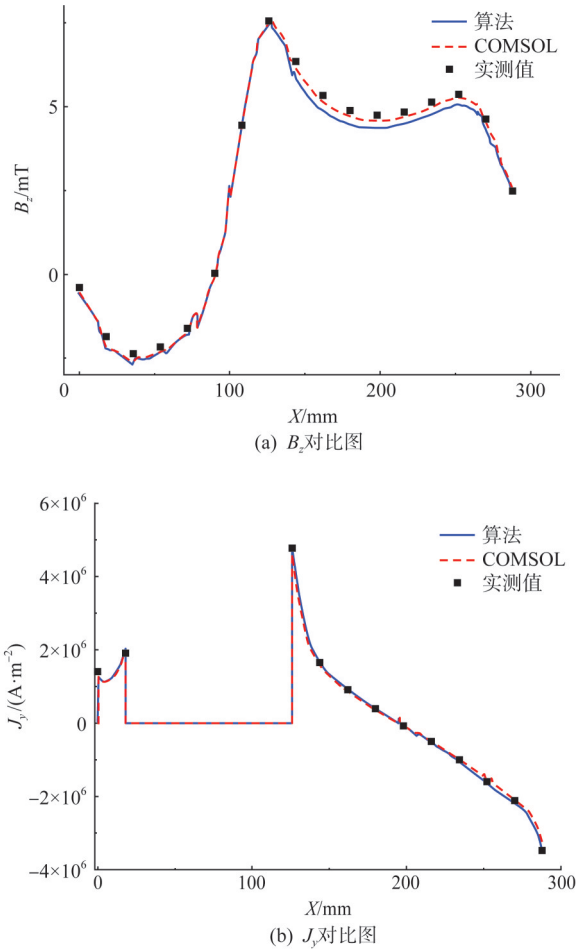


图 10　采样值对比

Fig. 10　Sampling value comparison

为进一步验证该计算模型的准确性，可将其与时域仿真模型进行对比验证。由于第 7 基准问题模型只含有一个绕组，不受其他因素影响，可采用时谐磁场的简单叠加来代替时域计算。为验证该方法，对该模型在时域条件下施加非正弦电流。该非正弦频率包括基波分量、三次谐波分量和五次谐波分量，其中，三次谐波和五次谐波的分量电流值约为基波电流的 30 %。

对时域下基波单匝电流为 6A 的测试点的所有时谐场进行重构，图 11 为时域仿真结果和 POD-ERBFLP 计算叠加下的 $\boldsymbol{B}_y$ 结果以及绝对误差云图。

从图 11 可以看出，该降阶模型磁通密度分布与仿真模型分布无明显差别，最大绝对误差为 0. 001 73 T，降阶模型与仿真模型的计算结果整体分布基本一致。

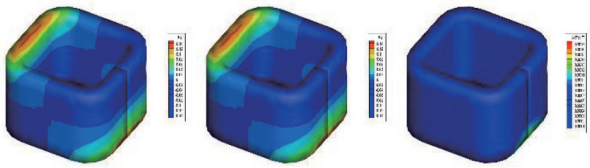


图 11　特定时刻下时域仿真与 POD-ERBFLP 重构的 B_y 云图对比

Fig. 11　Comparison of B_y distributions obtained by time-domain simulation and POD-ERBFLP reconstruction at a specific instant

3　应用实例

3. 1　模型建立

本文采用的算例模型为一台 400 kVA、15 kV/400 V 三相变压器，其结构模型如图 12 所示，主要包括铁心、绕组以及结构件等部分。

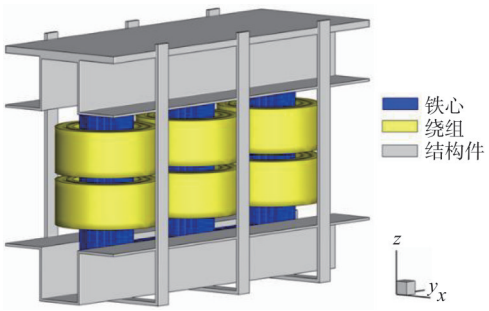


图 12　电力变压器结构图

Fig. 12　Structural diagram of the power transformer

该变压器高压侧绕组共693匝，低压侧绕组共32匝。变压器的结构参数与物性参数如表1—2所示。

图 13 为该变压器铁心的 ***B-H*** 曲线。

表 1　变压器的主要结构参数

Tab. 1　Main structural parameters of transformer

参数	数值
额定电压/kV	15/0. 4
额定电流/A	15. 3/577
额定容量/MVA	0. 4
铁心半径/mm	105
铁心窗高/mm	580
铁心窗宽/mm	327. 4
绕组高/mm	192
中间油道/mm	30
内侧绕组内/外径/mm	145/173
外侧绕组内/外径/mm	183/220. 2
线圈联结方式	Y-d

表 2 物性参数

Tab. 2 Physical parameters

部件	磁导率/(H·m^{-1})	电导率/(S·m^{-1})
铁心	*B*-*H* 曲线	0.1
结构件	$50\mu_0$	1.12×10^7
绕组	μ_0	4.6×10^7
空气	μ_0	0

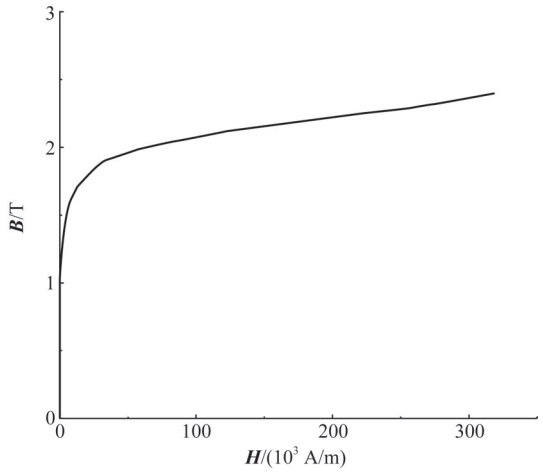


图 13 *B*-*H* 曲线

Fig. 13 *B*-*H* curve

变压器的网格剖分如图 14 所示。该网格模型单元总数为 847 104，节点数量为 202 059，该网格经过独立性验证，可以在保证精度的同时节省计算资源。

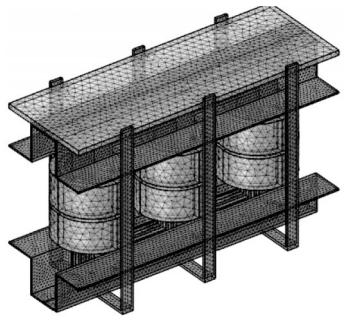


图 14 电力变压器网格剖分图

Fig. 14 Power transformer mesh discretization diagram

3.2 磁场及损耗计算

在时谐场条件下对该变压器进行磁场仿真计算[27]。为构建相应的快照矩阵，考虑采样效率，共选取 50 组样本点构建快照矩阵进行降阶计算，并另取 50 组测试点进行分析，如图 15 所示。

为验证该算法有效性，绘制得到 50 组测试样本磁感应强度 *B* 的全场域平均相对误差曲线，如图 16 所示。

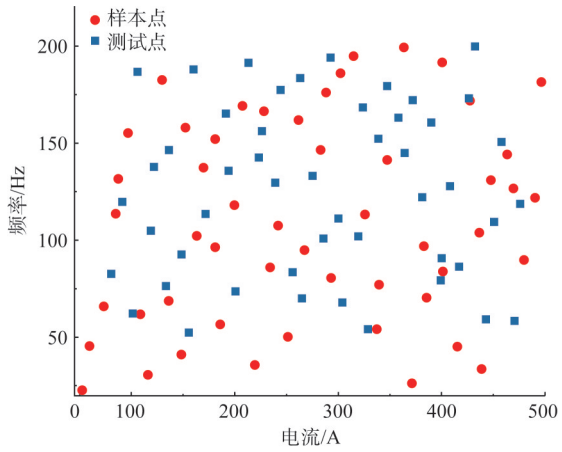


图 15 样本选取

Fig. 15 Sampling point selection

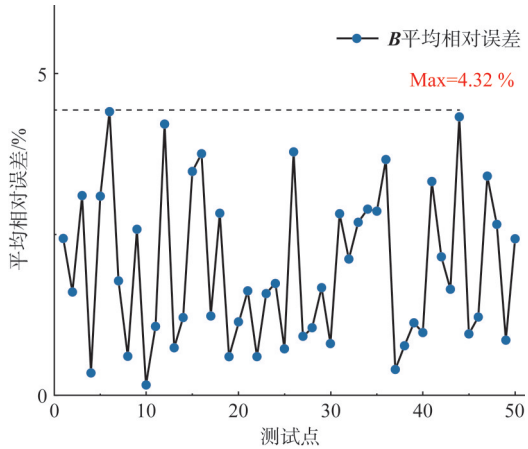


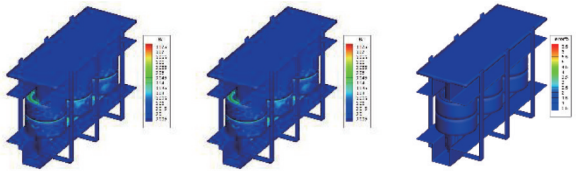
图 16 测试点全场域 *B* 平均相对误差

Fig. 16 Mean relative errors of the full-field domain *B* at the test points

从图 16 可以看出，该 50 组测试样本平均相对误差较小，最大平均计算偏差仅为 4.32 %，计算精度处于合理的范围以内。类似的，在船舶涡流磁场磁变模拟仿真中，10 对线圈时涡流磁场主要部分虚部误差小于 5 %，也被认定为模拟效果较优，进一步说明该偏差水平的计算精度具备合理性。

为了进一步说明算法的正确性，图 17 所示为测试点 *I*=309 A、*f*=170 Hz 的磁感应强度仿真结果图与降阶运算结果云图。由图 17 可以看到，两种方法计算结果基本一致，最大相对误差不超过 7 %。

考虑到本算法的显著优势在于其卓越的计算效率，为了充分证明这一点，本次仿真所用计算机配置为：CPU i9-10900KF，内存 128 GB。通过 COMSOL 进行时谐场仿真，并使用 POD-ERBFLP 降阶程序，对比了两种方法在一组时谐场测试工况



(a) 计算结果　(b) 仿真结果　(c) 绝对误差

图 17　电力变压器磁感应强度云图对比

Fig. 17　Comparison of magnetic flux density cloud diagrams of the power transformer

下的磁场计算效率。其中，降阶程序耗时可分为基于响应面代理模型的模态系数预测时间和时谐磁场重构时间，而仿真耗时即为仿真的全部时间。计算效率对比结果见表3。

表3　计算效率对比

Tab. 3　Comparison of computational efficiencies

两种方法	耗时/s	耗时占比/%
时谐场仿真	3 124	
降阶程序	0. 094	3.009×10^{-3}

由表3可知，降阶算法大大降低了计算时谐场下磁场分布及损耗的时间成本，解决了时谐场求解过程耗时过长、数据处理不便等问题。

4　结论

针对大型电力变压器现有方法时谐场磁场与损耗计算速度较慢的问题，基于POD和ERBFLP结合的降阶算法实现了TEAM7与三相电力变压器的快速仿真分析，得出结论如下。

1)提出了一种自动选择线性多项式阶数的ERBFLP的响应面模型，使用网格搜索算法以及5折交叉验证即可获得最佳拟合的阶数。相较于RBFLP响应面，ERBFLP在面对系统中的线性环节时，拟合效果更优。

2)为了解决超大规模矩阵降阶计算复杂性较高的问题，结合ERBFLP响应面方法建立了POD模态系数与影响变压器磁场及损耗分布的因素之间的响应面模型。该方法可以跳过传统非线性降阶方程组的求解过程，实现了磁场及损耗的快速计算。对TEAM7模型进行时谐磁场算例分析表明，该算法求得的结果与仿真计算结果相比，磁感应强度的平均相对误差小于3. 4 %。

3)将本文所提方法应用到三相电力变压器的磁场中，对比分析了时谐磁场的降阶结果与全阶结果。结果表明磁场相对平均误差均不超过4. 32 %，计算精度满足工程需求，且计算效率相比仿真计算有显著提升，表明了本文所提算法的工程适用性。

参考文献

[1] 赵志刚，尹赛宁，郭莹，等. 基于频域分析法的变压器非铁磁构件谐波杂散损耗研究[J]. 电工电能新技术，2018，37(7)：90－96.
ZHAO Zhigang，YIN Saining，GUO Ying，et al. Stray loss of non-ferromagnetic component under harmonic excitation condition based on frequency domain analysis [J]. Advanced Technology of Electrical Engineering，2018，37(7)：90－96.

[2] 赵岩，郑书生. 基于损耗电流谐波特征分析的XLPE电缆局部尖刺缺陷诊断[J]. 电工技术学报，2023，38(21)：5725－5737.
ZHAO Yan，ZHENG Shusheng. Diagnosis of XLPE cable local tip defects based on analysis of harmonic characteristics of loss current [J]. Transactions of China Electrotechnical Society，2023，38(21)：5725－5737.

[3] 范斌涛，吴书煜，汲胜昌，等. 不同含量谐波电流作用下变压器振动特性分析[J]. 高压电器，2025，61(2)：46－53.
FAN Bintao，WU Shuyu，JI Shengchang，et al. Vibration characteristic analysis of transformer under harmonic current with different contents [J]. High Voltage Apparatus，2025，61(2)：46－53.

[4] 张长虹，范广伟，邓军，等. 真空型有载分接开关谐波电流切换过程的电弧特性分析[J]. 高压电器，2026，62(7)：101－111，121.
ZHANG Changhong，FAN Guangwei，DENG Jun，et al. Analysis of arcing characteristics during harmonic current switching of vacuum type on-load tap-changer [J]. High Voltage Apparatus，2026，62(7)：101－111，121.

[5] 赵小军，武欣怡，章轩源，等. 高频多谐波激励下计及趋肤效应的软磁带材磁滞及损耗特性预测[J]. 中国电机工程学报，2024，44(22)：9039－9048.
ZHAO Xiaojun，WU Xinyi，ZHANG Xuanyuan，et al. Predicting hysteresis and loss characteristics of soft magnetic tape material considering skin effect under high frequency multi-harmonic magnetization [J]. Proceedings of the CSEE，2024，44(22)：9039－9048.

[6] 刘亚青. 非正弦电流下的HVDC换流变压器负载损耗特性研究[D]. 武汉：华中科技大学. 2017.

[7] 张良县，陈模生，彭宗仁，等. 非正弦负载电流下特高压换流变压器绕组的谐波损耗分析[J]. 中国电机工程学报，2014，34(15)：2452－2459.
ZHANG Liangxian，CHEN Mosheng，PENG Zongren，et al. Study on the harmonic losses of UHV converter transformer windings subject to non-sinusoidal load current[J]. Proceedings of the CSEE，2014，34(15)：2452－2459.

[8] 黄涛，阮江军，张宇娇，等. 瞬态运动电磁问题的时步有限元方法研究[J]. 中国电机工程学报，2013，33(6)：168－175，23.
HUANG Tao，RUAN Jiangjun，ZHANG Yujiao，et al. Research on the time stepping element method for solving the transient motion electromagnetic problems [J]. Proceedings of the CSEE，2013，33(6)：168－175，23.

[9] 王帅兵，李琳，赵小军，等. 定点时间周期有限元法及其在变

压器直流偏磁特性分析中的应用[J]. 中国电机工程学报，2017，37(17)：5198－5205,5240.
WANG Shuaibing，LI Lin，ZHAO Xiaojun，et al. Fixed-point time period finite element method and its application for DC bias characteristics of transformer [J]. Proceedings of the CSEE，2017，37(17)：5198－5205,5240.

[10] 王建华，王秀丽，王锡凡. 谐波平衡有限元法用于饱和铁心的损耗分析[J]. 电工技术学报，2002(1)：23－27,84.
WANG Jianhua，WANG Xiuli，WANG Xifan. Analyses of core loss for saturation iron using finite element method of harmonic balance [J]. Transactions of China Electrotechnical Society，2002(1)：23－27,84.

[11] ZHOU W，WU Z，LIU Y，et al. Time domain boundary element method for semi-infinite domain problems using CSR storage method [J]. Engineering Analysis with Boundary Elements，2023(147)：26－275.

[12] 秦文瑾，徐礼辉，卢登标，等. 本征正交分解法对正十二烷喷雾射流的解析[J]. 航空动力学报，2021，36(9)：1917－1923.
QIN Wenjin，XU Lihui，LU Dengbiao，et al. Analysis of n-dodecane spray jet by proper orthogonal decomposition [J]. Journal of Aerospace Power，2021，36(9)：1917－1923.

[13] JIANG G，KANG M，CAI Z，et al. Online reconstruction of 3D temperature field fused with POD-based reduced order approach and sparse sensor data [J]. International Journal of Thermal Science，2022(175)：107489.

[14] 芮庆，王路瑶，JOSÉ A G F，等. 基于本征正交分解的环境温度分布快速预测模型研究[J]. 制冷技术，2018，38(6)：54－60,67.
RUI Qing，WANG Luyao，JOSÉ A G F，et al. Research on rapid prediction model of ambient temperature distribution based on proper orthogonal decomposition method[J]. Chinese Journal of Refrigeration Technology，2018，38(6)：54－60,67.

[15] 胡万君，刘刚，朱章宸，等. 油浸式电力变压器绕组稳态温升降阶计算方法研究[J]. 中国电机工程学报，2023，43(16)：6505－6517
HU Wanjun，LIU Gang，ZHU Zhangchen，et al. Reduced order calculation method of steady temperature rise of oil immersed power transformer [J]. Proceedings of the CSEE，2023，43(16)：6505－6517.

[16] CHI C，YANG F，REN Z. Reduced order model based on combined POD/LDEIM-Q for nonlinear thermoelectric coupling [J]. IEEE Transactions on Magnetics，2022，58(9)：7402304.

[17] NGUYEN N C，PATERA A T，PERAIRE J. A best points interpolation method for efficient approximation of parametrized function [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering，2008，73(4)：521－543.

[18] 李凯，杨静媛，高传强，等. 基于POD和代理模型的静气动弹性分析方法[J]. 力学学报，2023，55(2)：299－308.
LI Kai，YANG Jingyuan，GAO Chuanqiang，et al. Static aeroelastic analysis based on proper orthogonal decomposition and surrogate model[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics，2023，55(2)：299－308.

[19] 郝云权，赵大志，李伟斌，等，POD-BPNN预测模型及结冰条件不确定性量化[J]. 南京航空航天大学学报，2023，55(2)：302－310.
HAO Yunquan，ZHAO Dazhi，LI Weibin，et al. POD-BPNN Prediction model and uncertainty quantification of aircraft icing conditions [J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics，2023，55(2)：302－310.

[20] 马跃，郭明明，孙博伦，等. 基于POD-PCE-Kriging模型的航空发动机高维多目标优化[J]. 航空动力学报，2023，38(7)：1604－1614
MA Yue，GUO Mingming，SUN Bolun，et al. High-dimensional multi-objective optimization of aero-engine based on POD-PCE-Kriging model[J]. Journal of Aerospace Power，2023，38(7)：1604－1614.

[21] 艾依斯. 基于径向基函数响应面优化方法研究[D]. 武汉：华中科技大学，2012.

[22] 朱章宸，刘尧，刘刚，等. 基于A,φ-A的变压器三维涡流场时域有限元POD降阶方法及其应用[J]. 华北电力大学学报(自然科学版)，2025，52(1)：82－94.
ZHU Zhangchen，LIU Yao，LIU Gang，et al. Time domain finite element POD order reduction method for 3D eddy current field of transformer based on A，φ-A and its application [J]. Journal of North China Electric Power University(Natural Science Edition)，2025，52(1)：82－94.

[23] 谢德馨，姚缨英，等. 三维涡流场的有限元分析[M]. 北京：机械工业出版社，2008.

[24] 刘刚，高成龙，胡万君，等. 基于改进的连续局部枚举采样和径向基函数响应面法的变压器静电环结构优化设计[J]. 电工技术学报，2023，38(23)：6266－6278.
LIU Gang，GAO Chenglong，HU Wanjun，et al. Optimized design of transformer electrostatic ring based on radial basis function response surface method with enhanced successful local enumeration sampling [J]. Transactions of China Electrotechnical Society，2023，38(23)：6266－6278.

[25] 刘刚，刘西娅，刘尧，等. 基于响应面法的变压器静电环绝缘优化设计[J]. 高电压技术，2022，48(10)：4163－4171.
LIU Gang，LIU Xiya，LIU Yao，et al. Optimal design of transformer electrostatic ring insulation based on response surface method[J]. High Voltage Engineering，2022，48(10)：4163－4171.

[26] FUJIWARA K，NAKATA T. Results for benchmark problem 7 (asymmetrical conductor with a hole)[J]. International Journal For Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering，1990，9(3)：137－154.

[27] 张长庚，田亚坤，李永建，等. 谐波及直流偏磁下变压器叠片式磁屏蔽杂散损耗模拟与验证[J]. 电工技术学报，2022，37(15)：3733－3742.
ZHANG Changgeng，TIAN Yakun，LI Yongjian，et al. Modeling and validation of stray-field loss in laminated magnetic shield of transformer under harmonics and DC bias[J]. Transactions of China Electrotechnical Society，2022，37(15)：3733－3742.

收稿日期：2024-09-12；**网络首发日期**：2024-12-13

作者简介：

李耕宇(2000)，男，硕士研究生，从事多物理场建模与仿真研究，352831098@qq. com；

刘刚(1985)，通信作者，男，副教授，硕士生导师，博士，研究方向为电气设备多物理场建模及仿真和电磁场理论及其应用，liugang_em@163. com；

袁海钦(2000)，男，硕士研究生，从事多物理场建模与仿真研究，1009231967@qq. com。